GYULA RETTER

MAGNETISCHE FELDER UND KREISE



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

GYULA RETTER

MAGNETISCHE FELDER UND KREISE



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

G. RETTER · MAGNETISCHE FELDER UND KREISE

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE

BAND 23

MAGNETISCHE FELDER UND KREISE

VON

G. RETTER



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN 1961

Retter Gyula, Mágneses terek és körök
Elektrotechnikai számítások I
Tankönyvkiadó Budapest 1952
Második, javított kiadás, Budapest 1958

Übersetzung aus dem Ungarischen nach der ersten Auflage:
Irma Fabó, Budapest
Deutsche Bearbeitung: Prof. Dr. Hans Stamm, Ilmenau, Dr. Gunther List, Berlin
Herausgeber und Verlag danken Herrn Doz. Dr. G. Retter
für die Durchsicht des ursprünglichen Manuskriptes und der Bogenkorrektur

ES: XVIII B 6, XVIII K 1

PRINTED IN THE GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC
LIZENZ-NR. 206·435/46/61
GESAMTHERSTELLUNG: VEB OFFIZIN ANDERSEN NEXÖ
IN LEIPZIG III/18/38

VORWORT ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Das im Jahre 1952 in erster, 1958 in zweiter Auflage erschienene ungarische Originalwerk Mágneses Terek Es Körök ist ein Band der vom Verfasser herausgegebenen Reihe Elektrotechnikai Számítások (Elektrotechnisches Rechnen), die sich folgende Ziele setzt: Dem Studenten der Elektrotechnik (aber auch dem Lehrenden und dem Praktiker) sollen Bücher in die Hand gegeben werden, die ihm helfen, an Hand von Beispielen die in Vorlesungen und Lehrbüchern dargebotene Theorie besser zu verstehen, die gebräuchlichen Methoden der Praxis näher kennen zu lernen und sich durch Übung einzuprägen, und die ihm schließlich ermöglichen, sich durch selbständiges Lösen von Aufgaben davon zu überzeugen, daß er den Stoff wirklich verstanden hat.

Um technische Probleme und Aufgaben der Praxis erfolgreich lösen zu können, muß man die theoretischen Grundlagen und die inneren Zusammenhänge verstanden haben. Das erfordert erfahrungsgemäß viel Zeit und oft auch eine langjährige Praxis. Der beste Weg zum Verständnis aber ist die Anwendung der Theorie bei der Lösung von Aufgaben.

Der Verfasser ist der Meinung, daß es falsch ist, Theorie und Praxis zu trennen. Er hatte schon als Student kein Verständnis dafür, daß in Mathematik (für Elektrotechniker) viele schwierige Methoden gelehrt und in der theoretischen Elektrizitätslehre tiefes, abstraktes physikalisches Wissen gefordert, aber in der Elektrotechnik selbst die Anwendung dieses Rüstzeuges sorgfältig und ängstlich vermieden wurde. Daher ist auch in diesem Buch zum Gebrauch in der Praxis sehr viel Mathematik und Theorie der Elektrizität enthalten; natürlich ist dieser Stoff auch in anderen Büchern zu finden. Er sollte aber übersichtlich zusammengestellt zum Nachschlagen bereit stehen und außerdem hier praktisch durchgearbeitet werden. Ein wesentliches Ziel jedes Unterrichts besteht ja gerade darin, die allseitigen Zusammenhänge deutlich werden zu lassen. Jedoch wird nicht mehr Theorie herangezogen, als wirklich notwendig ist. Der Verfasser war ferner bemüht, die Berechnungsmethoden so zu gruppieren, daß die leichten Fragen unschwer von den komplizierteren zu trennen sind. Beispielsweise können magnetische Kreise berechnet werden, ohne daß die ganze Theorie der magnetischen Felder studiert werden müßte.

Schon aus der Eigenart der in den einzelnen Bänden der Reihe behandelten Themenkreise ergab sich – bei möglichster Wahrung der Einheitlichkeit des Grundanliegens und der fachlichen und pädagogischen Zielsetzung –, daß jeder Band der Reihe ein abgeschlossenes Ganzes bilden und für sich allein verständlich sein mußte, wenn er sich natürlich auch an entsprechende

Lehrbücher anlehnt. Diese bewußte Bezugnahme auf die Lehrtradition an ungarischen Universitäten und Hochschulen und auf ungarische Lehrbücher machte eine umfangreiche und zeitraubende Bearbeitung der deutschen Übersetzung notwendig, wenn sie dem deutschsprachigen Leserkreis den beabsichtigten Nutzen bringen sollte. Termini, Formelzeichen, Einheiten usw. mußten entsprechend geändert werden; auch wurde der Text gestrafft. Selbstverständlich blieben Inhalt, Aufbau und Gliederung erhalten.

Im ersten Kapitel wird eine Übersicht über die theoretischen Grundlagen der Elektrotechnik gegeben, damit der Leser beim Durchrechnen der Beispiele darauf zurückgreifen kann. Das zweite Kapitel behandelt magnetische Felder und Kreise, wobei verschiedene Methoden der Berechnung und Zeichnung dargestellt und gegenübergestellt werden. In einem Anhang zu Kapitel 1 und 2 wird in Form von Anmerkungen (auf die mit hochgestellten Ziffern verwiesen wird) auf solche Begriffe, Zusammenhänge und mathematische Methoden eingegangen, die der Leser zum Verständnis dieser Kapitel braucht, deren Behandlung dort aber den Gang der Darstellung störend unterbrochen hätte. (Soweit sie dem Leser geläufig sind, kann er natürlich auf die Lektüre verzichten.) Das umfangreiche 4. Kapitel bringt 88 durchgerechnete Beispiele, während das 5. Kapitel 103 Aufgaben enthält, die der Leser selber lösen soll. Zur Kontrolle sind vielfach die Resultate angegeben; bei verschiedenen Lösungswegen können Abweichungen in den Zahlenwerten auftreten. Ein ausführliches Literaturverzeichnis, dem eine orientierende Übersicht vorangestellt ist, nennt Quellen und weist auf Bücher und Arbeiten hin, in denen der Leser ausführlichere Darstellungen findet.

Auf eine Formelsammlung wurde bewußt verzichtet, um der schädlichen Auffassung, man könne das Studium der Elektrotechnik statt auf das Denken auf das Sammeln von Formeln gründen, nicht Vorschub zu leisten.

Der Verfasser war bestrebt, in der Art der Darstellung moderne Gesichtspunkte zu berücksichtigen, die Begriffe Stark- und Schwachstrom, Feld und Stromkreis und die grundlegenden Erscheinungen des Dauer- und Übergangszustandes einheitlich zu erklären; die neueste Entwicklung der Elektrotechnik macht das unvermeidlich.

Der Dank des Verfassers gilt auch an dieser Stelle seinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. József Liska, dem er alles verdankt, was in diesem Buche richtig ist, ferner den Herren Prof. Dr. Károly Pál Kovács und Prof. Dr. Károly Simonyi für wertvolle grundsätzliche Ratschläge sowie den Herren István Rácz, Oszkár May, László Schnell, Iván Szita, Lajos Bajza und Tivadar Tóth für mehrere Hinweise und den Gutachtern Sándor Lajkó und László Rajó. Schließlich möchte er auch allen Mitarbeitern an der deutschen Ausgabe, insbesondere Herrn Prof. Dr. F. X. Eder als dem zuständigen Herausgeber, seine Dankbarkeit zum Ausdruck bringen.

Budapest, im Juli 1961 G. Retter

INHALTSVERZEICHNIS

1 ÜBERSICHT ÜBER DIE THEORETISCHEN GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK

1.1 EINLEITUNG

Im Verlauf des Studiums erlernt der Student Tatsachen, deren Zusammenhänge er oft erst später, indem er sich ihrer erinnert, übersieht. Viele der grundlegenden Tatsachen aber vergißt er vom Studium der Grundlagen bis zum späteren Fachstudium, da er noch nicht weiß, wozu sie dienen. Das Fachstudium setzt die Kenntnis der allgemeinen Grundlagen voraus. Sie in Erinnerung zu bringen, soll die einleitende Übersicht dienen. Sie ist als Gedächtnisstütze gedacht und soll in großen Zügen das Wissenswerte vermitteln, damit die Einzelprobleme der Aufgabensammlung eine einheitliche Basis erhalten. Auf zwei didaktisch außerordentlich wichtige Grundgedanken sei in diesem Zusammenhang hingewiesen:

1. Als gemeinsame Grundlage aller Erscheinungen der Elektrotechnik kann das elektromagnetische Feld angesehen werden.
2. Das elektromagnetische Feld soll auf die Kraftwirkung zwischen elektrischen Ladungen zurückgeführt werden.

Dadurch soll jedoch nicht ausgedrückt werden, daß die Ladungen physikalisch ursprünglicher als das Feld wären. Lediglich aus methodischen Gründen wird der Ladung in der Reihenfolge der Vorzug gegeben. Diese Fragen der Reihenfolge sind, wie POHL sagt, „aphysikalisch". In seiner Einführung in die Elektrizitätslehre sagt er weiter, daß die elektrischen Begriffe spezifisch zu dieser Wissenschaft gehören und die elektrischen Vorgänge sich nicht auf mechanische zurückführen lassen. Damit ist aber nicht gesagt, daß man die elektrischen Vorgänge nicht mit Hilfe mechanischer erläutern kann. Auf den hier vorliegenden Fall übertragen heißt das, die Ladung wird als primär aufgefaßt, und das in ihrer Nähe vorhandene Feld als ein von ihr erzeugter Zustand. Die gegenteilige Darstellung kann ein exakteres Bild der Natur liefern, doch scheint die Konzeption des geladenen Teilchens zur Entwicklung der Wissenschaft der Elektrizität und des Magnetismus geeigneter zu sein (HESSLER).

Die Beziehung zwischen Ladung und Feld wird von K. SIMONYI folgendermaßen dargestellt: „Das elektromagnetische Feld wird letzten Endes durch elektrische Ladungen erzeugt. Wir messen sowohl den elektrischen Ladungen als auch dem elektrischen Feld eine Realität bei. Der Ladung deshalb, weil dieselbe in diskreten Werten vorkommt und das Feld erzeugt, dem Feld, weil es ein Träger der elektromagnetischen Energie und des elektromagnetischen

Impulses ist."[1]) Meiner Meinung nach ist es kein wesentlicher Widerspruch, wenn danach getrachtet wird, das Verständnis durch die nachstehend erörterte Dreiteilung zu erleichtern. (Einzelheiten hierüber siehe Literaturhinweise unter B.)

Die Elektrotechnik kann nach den erforderlichen theoretischen Hilfsmitteln in drei große Gebiete eingeteilt werden. Das erste umfaßt die Probleme, bei denen die Anwendung des Begriffes „Stromkreis" zulässig ist. Das zweite befaßt sich mit solchen, die nur mit Hilfe elektromagnetischer Feldgrößen zugänglich sind, wie z.B. die Wellenausbreitung, Hochfrequenzprobleme, die genaue Untersuchung der Energieströmung auf Leitungen usw. Das dritte beschäftigt sich mit Fragen, die im Übergangsgebiet zwischen den beiden genannten liegen, wie z.B. die technische Lösung von Fernleitungsproblemen mit verteilten Kenngrößen. Im Unterricht beginnt man gewöhnlich mit der naheliegenden Theorie des Stromkreises, und in der Starkstromtechnik begnügt man sich im allgemeinen damit. Heute ist jedoch wegen der Verknüpfung der gesamten Elektrotechnik eine solche Einschränkung in der Darstellung nicht mehr zulässig. Alle Erscheinungen verlaufen räumlich und zeitlich, sind also „Felderscheinungen". In der Praxis herrscht das Bestreben vor, die gestellten Aufgaben einfach erklären, leicht lösen und anschaulich darstellen zu können. Deshalb werden die räumlichen und zeitlichen Erscheinungen des elektromagnetischen Feldes durch rein zeitliche Zusammenhänge in der „Stromkreis"-Vorstellung angenähert, wobei die reellen physikalischen Größen in Schaltparameter mit möglichst konstanten Werten zusammengefaßt werden.

Die folgende Übersicht ist in drei Abschnitte eingeteilt. Im ersten werden die grundlegenden Tatsachen des Elektromagnetismus auf die Kraftwirkungen zwischen Ladungen aufgebaut. In den beiden anderen wird das Feld als gegeben angesehen. Während der zweite Abschnitt in erster Linie die bildhafte Darstellung des Feldes verwendet, wird im dritten der gesamte Komplex mathematisch formuliert.

Betrachtet man – wie es die Absicht des Verfassers ist – diese Abschnitte als logische Folge, so kann man sagen, daß im ersten Abschnitt das elektrische und magnetische Feld auf der gemeinsamen Grundlage der Wechselwirkung der Ladungen dargestellt werden. Diese Darstellung nähert sich in den meisten Punkten der der Mechanik, so daß daraus ein geeigneter Hilfsbegriff für die Berechnung des elektromagnetischen Feldes geschaffen werden kann. Im zweiten Abschnitt folgt die Darstellung des elektromagnetischen Feldes ohne mathematische Formulierungen, begründet durch einfache Versuche und eine im Laufe der weiteren Studien weitgehend anwendbare Version. Im dritten Abschnitt wird schließlich die umfassende, allgemein gültige mathematische Fassung des elektromagnetischen Feldes dargestellt.

Wenn man die einzelnen Abschnitte nebeneinander- und einander gegenüberstellt, dann zeigt sich, daß der erste den Standpunkt der „Fernwirkung", die

---

[1]) K. Simonyi, Theoretische Elektrotechnik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

beiden anderen hingegen den der „Nahwirkung“ oder „Feldwirkung“ vertreten. Im ersten Teil sind also die Gedanken von WEBER und NEUMANN, im zweiten die Kraftlinienvorstellung von FARADAY und im dritten die Theorie von MAXWELL bzw. die Umrisse der daraus entwickelten, auf den MAXWELLschen Gleichungen beruhenden und oft „axiomatisch“ aufgebauten Elektrodynamik enthalten. Die beiden letzten Abschnitte befassen sich mit der integralen bzw. differentiellen Fassung der FARADAY-MAXWELLschen Theorie. Die Darstellung in der Integralform gleicht der üblichen Darstellungsweise in den Lehrbüchern, die vorwiegend starkstromtechnische Probleme behandeln, während die Darstellung in der Differentialform sich den Büchern anpaßt, die die theoretischen Grundlagen bzw. die Wellengleichungen behandeln.

Auf das strittige und erkenntnistheoretische Problem der Gegenüberstellung der genannten Vorstellung soll nicht näher eingegangen werden. Wesentlich wichtiger scheint dagegen die entsprechende Reihenfolge zu sein. Während im Prinzip die gesamte Theorie und die Anwendungen des Elektromagnetismus unberührt bleiben, erhält die Theorie lediglich einen unseren Vorstellungen von der Mechanik näherliegenden und dadurch übersichtlicheren Unterbau. Dabei verschwindet die elektrisch-magnetische Dualität und die bisherige „Mystik“ der Theorie.

Bei Kenntnis dieser Zusammenhänge kann der Student die Begriffe und Bilder des elektromagnetischen Feldes ohne weiteres anwenden. Er kennt dann die Grenzen ihrer Gültigkeit und ihrer Anwendbarkeit. Er wird nicht mehr durch die beiden – elektrischen und magnetischen – CGS-Einheiten verwirrt. Er betrachtet sowieso den dadurch betonten zweifachen Formalismus entweder als mathematische Manipulationen der Vektoranalysis oder als ein anschaulich-reelles Bild der Kraftlinien. Die erste Anschauung entmutigt die mittelmäßig begabten Studenten, die zweite führt die besseren zu inneren Widersprüchen.

In den folgenden Ausführungen können bis ins einzelne gehende Feinheiten selbstverständlich nicht behandelt werden. Wegen der eingehenden Beweisführung und Entwicklung der Gedanken wird auf die im Literaturverzeichnis angeführten Werke verwiesen. An sich können nur die den Anfangsstudien folgenden „Grundzüge der Elektrotechnik“ didaktisch nach folgender Systematik aufgebaut werden:

Begründung der Feldvorstellung aus den auf elektrische Ladungen wirkenden Kräften, eingehende experimentelle Entwicklung dieser Vorstellung, allgemeine mathematische Darstellung des Elektromagnetismus. Ausgehend von dieser elektromagnetischen Theorie gelangt man zu den einzelnen Anwendungsgebieten der Elektrotechnik, auf der einen Seite zu jenen Wellen- und Hochfrequenzerscheinungen, die nur durch die Feldvorstellung gedanklich zugänglich und berechenbar sind, auf der anderen Seite zum Stromkreis mit dem vereinfachten, leicht zu behandelnden Bild der allgemeinen Feldtheorie. Schließlich wird dann noch im Übergangsgebiet zwischen beiden Anwendungsgebieten gezeigt, wie diese einfachen Näherungsbegriffe aus den der früheren strengeren Behandlung entsprechenden Feldcharakteristiken berechnet werden können.

1.2 DIE KRAFTWIRKUNGEN DER LADUNGEN

Die Theorie des Elektromagnetismus geht von den Kräften aus, die von ruhenden oder bewegten elektrischen Ladungen aufeinander ausgeübt werden.

Zwei ruhende Ladungen ziehen sich an oder stoßen sich ab mit einer Kraft, die der Größe und der gegenseitigen Lage der Ladungen entspricht. Man bezeichnet diese Erscheinung als die elektrostatische Kraftwirkung. Bewegte Ladungen sind die Ursache der Kraftwirkungen zwischen stromführenden Leitern und der dynamischen Induktion. Die beschleunigte Bewegung von Ladungen ist die Ursache der transformatorischen Induktion und der elektromagnetischen Wellenausbreitung.

In der Praxis muß man die gemeinsame Wirkung vieler Ladungen betrachten. Um einfache Gesetzmäßigkeiten zu erhalten, ist es zweckmäßig, die Kraftwirkung zweier Ladungen zu untersuchen. Man nimmt an, daß die eine Ladung am Orte der anderen Ladung und überall im umgebenden Raum einen bestimmten Zustand, ein Kraftfeld, erzeugt. Dieses wirkt auf die andere Ladung mit einer bestimmten Kraft.

Die von der gegenseitigen Lage der Ladungen bestimmte Kraftwirkung wird gewöhnlich auf das elektrische Feld zurückgeführt, die durch die gleichförmige Bewegung der Ladungen auftretenden Kraftwirkungen auf das magnetische Feld. Die Wirkung beschleunigter Ladungen wird in dieser Übersicht auf das Vektorpotentialfeld zurückgeführt.

Die Existenz der drei genannten Felder wird durch drei experimentelle Gesetze begründet. Für die Kräfte zwischen ruhenden Ladungen gilt das COULOMBsche Gesetz; für Ladungen, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen, das Gesetz von AMPÈRE. Das Vektorpotential wird durch das Induktionsgesetz von FARADAY eingeführt.

Der Begriff des Vektorpotentialfeldes ist ungewohnter als der des magnetischen Feldes, weil die Natur hierfür kein so anschauliches Hilfsmittel bietet wie die Elementarmagnete. Seine seltene Verwendung in der Praxis ist aber in Anbetracht seines vielseitigen Nutzens nicht gerechtfertigt.

1.21 Das elektrische Feld

Das COULOMBsche Gesetz besagt, daß zwei ruhende Punktladungen Q_1 und Q_2, die sich in der Entfernung a voneinander befinden, im Vakuum (oder in Luft) mit einer Kraft vom Betrage

$$P = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \tag{1.1}$$

aufeinander wirken(1, 2)[1]. Die Konstante ε_0 heißt *Dielektrizitätskonstante* des Vakuums. Ihr Zahlenwert und ihre Dimension hängen von der Wahl der Einheiten der anderen Größen, d.h. vom gewählten Maßsystem ab.

---

[1]) Die Indices verweisen auf die Anmerkungen im Anhang (S. 82).

Werden die Ladungen in ein anderes Dielektrikum gebracht, sinkt die Kraft auf den ε_r-ten Teil des in Luft oder Vakuum gemessenen Wertes ab:

$$P = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a^2}; \tag{1.2}$$

ε_r ist die *relative Dielektrizitätskonstante* des betreffenden Mediums und eine dimensionslose Zahl.

Das COULOMBsche Gesetz sagt nichts darüber aus, auf welche Art die Kraftwirkung zwischen zwei Ladungen zustande kommt. Es bringt lediglich zum Ausdruck, daß die Ladungen durch den zwischen ihnen liegenden Raum unmittelbar Kraftwirkungen aufeinander ausüben. Man kann sich die Kraftwirkung erklären, indem man annimmt, daß die Ladung Q_1 im gesamten umgebenden Raum ein elektrisches Kraftfeld erzeugt, das auf jede andere Ladung, also auch auf Q_2, wirkt. Dieser Zustand des Raumes, das elektrische Feld, wird in jedem Punkt durch die elektrische Feldstärke gekennzeichnet: Die Ladung Q_1 erzeugt in der Entfernung a eine Feldstärke der Größe

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}. \tag{1.3}$$

Diese übt auf die Ladung Q_2 eine Kraft vom Betrage

$$P = EQ_2 \tag{1.4}$$

aus. Die Größe der Feldstärke ist demnach gleich der Kraft, die auf die Einheitsladung wirkt.

Die Kraft, die auf Q_2 wirkt, hat die Richtung der Geraden, die Q_1 mit Q_2 verbindet. Die Feldstärke ist ein Vektor. Seine Richtung stimmt bei positivem Q_2 mit der Richtung der Kraft überein. Durch diese Definition wird das elektrische Feld von der erzeugenden Ladung getrennt und als selbständig existierend betrachtet. Es kann also gesagt werden, daß überall dort, wo eine Kraft auf eine vorhandene Ladung wirkt, ein elektrisches Feld existiert. Dessen Richtung und Größe, die elektrische Feldstärke, bestimmt sich aus dem Verhältnis der in dem betrachteten Punkt auf die Ladung wirkenden Kraft zur Größe der Ladung:

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{P}}{Q}. \tag{1.5}$$

Das elektrische Feld kann man durch „Feldlinien“ oder „Kraftlinien“ beschreiben, die der Richtung der elektrischen Feldstärke folgen. Die „Dichte“ dieser Linien, d.h. die Anzahl der Linien, die durch die senkrecht zu ihnen liegende Flächeneinheit verlaufen, wird durch die Größe der Feldstärke bestimmt.

Die elektrische Feldstärke hängt einerseits von der erzeugenden Ladung, andererseits von der Dielektrizitätskonstante des Mediums ab. Um eine Größe einzuführen, die unmittelbar von der Ladung abhängt, sagen wir, daß

die punktförmige Ladung Q_1 in der Entfernung a die dielektrische Verschiebungsdichte – auch dielektrische Erregung genannt – vom Betrage

$$D = \frac{Q_1}{4\pi a^2} \tag{1.6}$$

erzeugt. Sie bewirkt die Feldstärke

$$E = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r a^2}. \tag{1.7}$$

Die dielektrische Verschiebungsdichte ist ein Vektor, dessen Richtung im isotropen Medium mit der Richtung der elektrischen Feldstärke übereinstimmt:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathfrak{E}. \tag{1.8}$$

In der Vorstellung des Elektrotechnikers verhalten sich dielektrische Erregung und elektrische Feldstärke wie Ursache und Wirkung. Vor MAXWELL wurden den Ladungen unmittelbare Wirkungen aufeinander zugesprochen („Fernwirkungstheorie"). Nach der „Feldwirkungstheorie" pflanzen sich im elektrischen Feld die Wirkungen des Feldes, also der besondere, das Feld charakterisierende Zustand, von Punkt zu Punkt fort. Zur Einfügung der Ladung in die Feldwirkungstheorie muß eine von der Ladung ausgehende, „sich ausbreitende" Erregung vorausgesetzt werden. Diese Erregung, die die Feldstärke erzeugt, ist die dielektrische Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$.

Bildet man das Integral von $\mathfrak{D}$ über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r, die die Punktladung Q_1 konzentrisch umschließt, so erhält man

$$\oint \mathfrak{D}\, d\mathfrak{F} = \oint \frac{Q_1}{4\pi r^2}\, dF = \frac{Q_1}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2 = Q_1. \tag{1.9}$$

Das Flächenintegral der dielektrischen Verschiebungsdichte auf der Kugel ist gleich der in der Kugel eingeschlossenen Ladung Q_1. Das gleiche Ergebnis erhält man auch leicht für jede beliebige geschlossene Fläche und für jede beliebige Zahl von Ladungen, ebenso für beliebig verteilte Ladungen.

Man kann den Vektor $\mathfrak{D}$ ähnlich wie $\mathfrak{E}$ durch Linien veranschaulichen, deren Tangenten überall mit der Richtung von $\mathfrak{D}$ zusammenfallen. Die Zahl der Linien durch die auf der Richtung von $\mathfrak{D}$ senkrecht stehenden Einheitsfläche ist gleich dem Zahlenwert von $\mathfrak{D}$. Die Gesamtzahl der eine beliebige Fläche durchsetzenden $\mathfrak{D}$-Linien ist der dielektrische Fluß

$$\Psi = \int \mathfrak{D}\, d\mathfrak{F}.$$

Der dielektrische Fluß durch eine beliebige geschlossene Fläche ist demnach gleich der eingeschlossenen Gesamtladung

$$\Psi = \oint \mathfrak{D}\, d\mathfrak{F} = \sum_i Q_i. \tag{1.10}$$

Im Falle verteilter Ladungen, wenn ϱ die Ladungsdichte bedeutet, ist

$$\oint \mathfrak{D}\, d\mathfrak{F} = \oint \varrho\, dv. \tag{1.11}$$

Dies ist der GAUSSsche Satz, der den aus dem COULOMBschen Gesetz folgenden Aussagen gleichwertig ist und diese auf Ladungsanordnungen endlicher Ausdehnung erweitert. Dieser Satz gibt den allgemein gültigen, vom Material des Feldabschnittes unabhängigen Zusammenhang zwischen dem Flächenintegral der dielektrischen Verschiebungsdichte über eine geschlossene Fläche und den umschlossenen Ladungen wieder.

Über die Verteilung von $\mathfrak{D}$ sagt der Satz von GAUSS nichts aus. Seiner Anwendung bei Berechnungen stehen einige Schwierigkeiten entgegen. Gewisse Erleichterungen ergeben sich dadurch, daß die Dielektrizitätskonstante der meisten Stoffe unter gleichen physikalischen Bedingungen konstant ist.

Durch den Satz von GAUSS ist festgelegt, daß die Feldlinien des elektrischen Feldes an den Ladungen oder im Unendlichen beginnen und enden. Die Ladungen sind die Quellen dieser Linien. Durch die Angabe der Feldstärkevektoren in den einzelnen Punkten des elektrischen Feldes ist dieses vollständig beschrieben.

Man kann jedoch das Feld noch auf eine andere Art darstellen. Eine Ladung besitzt im elektrischen Feld eine bestimmte potentielle Energie. Sie kann sich nämlich, freie Beweglichkeit vorausgesetzt, unter dem Einfluß der wirkenden Kraft verschieben und ist daher fähig, Arbeit zu leisten.

Die punktförmige Ladung Q soll im elektrischen Feld einen Weg s zurücklegen. Dabei leisten die Feldkräfte die mechanische Arbeit A. Indem wir dem Weg s der Ladung Q mit den Endpunkten 1 und 2 eine elektrische Spannung

$$U_{1,2} = \frac{A}{Q} \tag{1.12}$$

zuschreiben, die die geleistete Arbeit charakterisiert, erhalten wir

$$U_{1,2} = \frac{A}{Q} = -\frac{\int_1^2 \mathfrak{P}\, d\mathfrak{s}}{Q} = -\int_1^2 \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s}. \tag{1.13}$$

In einem statischen elektrischen Feld oder, allgemeiner ausgedrückt, in einem wirbelfreien Feld erhält man gleiche Spannungen für alle zwischen zwei festen Punkten gelegenen Wege. Die Spannung hängt nur von der Lage der Endpunkte und nicht vom Wege ab. Demnach können den einzelnen Punkten im Raum Zahlenwerte zugeschrieben werden, so daß die Differenz zweier Zahlenwerte gleich der Spannung zwischen den zugehörigen Punkten ist.

Diese Zahlenwerte werden elektrische Potentiale der jeweiligen Punkte genannt. Ist z.B. V_1 das Potential des Punktes 1 und V_2 das des Punktes 2, dann ist die Spannung $U_{1,2}$ gleich der Potentialdifferenz $V_1 - V_2$. Ist für einen Punkt das Potential beliebig festgelegt worden, sind auch die Potentiale für alle übrigen Punkte bestimmt. Im allgemeinen werden die Potentiale auf das willkürlich als Null gewählte Potential der Erde bezogen.

Alle Punkte gleichen Potentials liegen auf einer oder mehreren geschlossenen Flächen, den Äquipotentialflächen. Zur Verschiebung einer Ladung längs dieser Flächen ist keine Arbeit erforderlich. Die Feldlinien verlaufen daher überall senkrecht zu den Äquipotentialflächen.

1.22 Die Kapazität

Befinden sich auf zwei parallelen, voneinander isolierten, ebenen Leiterflächen die Ladungen $+Q$ bzw. $-Q$, dann besteht zwischen ihnen ein elektrisches Feld. Die Leiterflächen sind Äquipotentialflächen. Ihre Potentialdifferenz ist

$$U = \int_1^2 E\,ds = \int_1^2 \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\,ds.$$

In diesem einfachen Fall verteilen sich die Feldlinien der dielektrischen Verschiebungsdichte überall gleichmäßig zwischen den Platten. (Feldverzerrungen an den Rändern sollen unter der Voraussetzung großer Abmessungen und geringen Abstandes der Platten vernachlässigt werden.) Nach dem Satz von GAUSS ist dann

$$D = \frac{Q}{F}.$$

Darin ist F die Fläche einer Platte.

Damit erhält man für die Spannung

$$U = \int_1^2 \frac{Q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r F}\,ds = Q \int_1^2 \frac{ds}{\varepsilon_0 \varepsilon_r F}. \qquad (1.14)$$

Der reziproke Wert des Integrals auf der rechten Seite heißt *Kapazität* und ist der Proportionalitätsfaktor zwischen Spannung und Ladung des Kondensators. Er hängt von den geometrischen Abmessungen und dem Dielektrikum ab.

Wenn das Feld zwischen den Platten nicht homogen ist, bestimmt man die Feldstärke in den einzelnen Punkten entlang einer zwischen den Leiterflächen zweckmäßig gewählten Linie, bildet deren Linienintegral und erhält damit für die Spannung zwischen den beiden Leiterflächen

$$U = \int_s \mathfrak{E}\,d\mathfrak{s}.$$

Ebenso bestimmt man überall auf den Flächen die dielektrische Verschiebungsdichte und deren Fluß, der den Wert der Ladung

$$Q = \int_F \mathfrak{D}\,d\mathfrak{F}$$

ergibt.

Man erhält damit die Kapazität

$$C = \frac{\int\limits_F \mathfrak{D}\, d\mathfrak{F}}{\int\limits_s \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s}}. \tag{1.15}$$

In einfachen Fällen führt die Berechnung, in komplizierteren das graphische Verfahren zum Ziel.

Der Zusammenhang zwischen U und Q besteht auch dann, wenn sich beide Werte langsam verändern. Dann ist der Ladestrom der Leiterflächen

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt}. \tag{1.16}$$

Mit Hilfe der Kapazität kann man also bei langsam veränderlichen Feldern das Verhalten des aus Leitern und dazwischenliegender Isolation bestehenden Feldabschnittes kennzeichnen und statt mit den schwer zugänglichen elektrischen Feldgrößen mit den leicht meßbaren Integralgrößen Strom und Spannung rechnen.

Durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung (1.16) mit $u\,dt$ ergibt sich

$$u \cdot i\,dt = C\,u\,du.$$

Für die in einem Kondensator aufgespeicherte elektrische Energie erhält man daraus

$$W = C\int\limits_0^{u_c} u\,du = \frac{1}{2}\,C\,u_c^2. \tag{1.17}$$

Die Kapazität ist also auch für die elektrische Energie dieser Anordnung bestimmend.

Ein Strom wird durch die Bewegung von Ladungen hervorgerufen. Die Grundgesetze der Elektrostatik sind auch für konstante oder langsam veränderliche Ströme gültig, und zwar immer für die augenblickliche Lage der Ladungen. Eine stationäre Bewegung von Ladungen kann in Leitern aufrechterhalten werden, wenn die abfließenden Ladungen ständig durch neue ersetzt werden. Die Kraft, welche die Ladungen in Bewegung setzt und den Strom aufrechterhält, wird *elektromotorische Kraft* genannt. Die Quelle der elektromotorischen Kraft kann chemischer, thermischer, lichtelektrischer, mechanisch-elektrischer oder mechanisch-elektromagnetischer Natur sein. Da die Spannung zahlenmäßig gleich der Arbeit ist, die zur Verschiebung der Einheitsladung zwischen zwei gegebenen Punkten benötigt wird, ist zur Verschiebung einer Ladung Q die Arbeit

$$uQ = u\,i\,dt$$

erforderlich. Diese Stromarbeit wird im Leiter in Wärme umgewandelt. Im Zeitabschnitt dt entsteht nach dem experimentell von JOULE gefundenen Gesetz die Wärme $i^2 R\,dt$. Es ist also

$$u\,i\,dt = i^2 R\,dt. \tag{1.18}$$

In dieser Beziehung ist das ebenfalls experimentell von OHM gefundene Gesetz enthalten:

$$u = iR. \tag{1.19}$$

Der Widerstand R des Stromkreises begrenzt die Stromstärke und kennzeichnet die entstehende Wärmemenge.

Durch diese Betrachtungsweise wird der Begriff „Widerstand“ als eine die Verluste im Stromkreis bestimmende Größe eingeführt und damit allgemeingültiger definiert, als wenn man vom Spannungsabfall ausgeht.

In einem Wechselstromkreis sind die Verluste größer, als sich aus der effektiven Stromstärke und dem Gleichstromwiderstand errechnet.

Infolge der zeitlichen Änderungen des elektrischen und des magnetischen Feldes in der Nähe des Leiters treten zusätzliche Verluste auf, wie Wirbelstromverluste in den Leitern und umgebenden Metallteilen, Hysteresisverluste in magnetischen Stoffen, dielektrische Verluste in den Isolatoren und Verluste infolge der in den Raum ausgestrahlten Energie. Der Skineffekt (Hauteffekt) bewirkt einen zusätzlichen Widerstandsanstieg.

1.23 Das magnetische Feld

Für die Kraftwirkung zwischen bewegten Ladungen (elektrischen Strömen) gilt das AMPÈREsche Gesetz. Das Bild des magnetischen Feldes wird in ähnlicher Weise darauf aufgebaut, wie das des elektrischen Feldes auf dem COULOMBschen Gesetz.

Das AMPÈREsche Gesetz gibt die Kraft zwischen zwei langen parallelen stromführenden Leitern an. Ist die Entfernung der Leiter a, ihre Länge l und fließen in ihnen die Ströme i_1 und i_2, dann übt der Strom i_1 auf den Leiter mit dem Strom i_2 eine Kraft aus von der Größe

$$P = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2 l}{a}. \text{ [3]} \tag{1.20}$$

Diese Kraft wirkt anziehend oder abstoßend, je nachdem die Ströme gleich- oder entgegengerichtet fließen.

Der Faktor μ_0 ist eine vom Maßsystem bestimmte Konstante und heißt die *Permeabilität* des Vakuums.

Das vorstehend genannte Ergebnis beruht auf experimentellen Tatsachen. Man kann sich vorstellen, daß die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegenden Ladungen des Stromes i_1, die sich ebenfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegenden Ladungen des Stromes i_2 anziehen bzw. abstoßen. Ebenso wie beim elektrischen Feld liegt die Annahme zugrunde, daß der Strom des Leiters 1 am Ort des Leiters 2 einen bestimmten Zustand des Raumes, das magnetische Feld, hervorgerufen hat, der auf den Strom des Leiters 2 wirkt. Die Größe, die den in der Umgebung eines stromführenden Leiters erzeugten Zustand, das Magnetfeld, kennzeichnet, wird *magnetische*

Induktion genannt. Ihr Wert ist an den Orten von i_2 durch die auf den Strom i_2 ausgeübte Kraft

$$|\mathfrak{P}| = |\mathfrak{B}|\, i_2 l \tag{1.21}$$

bestimmt:

$$|\mathfrak{B}| = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi a}. \tag{1.22}$$

$\mathfrak{B}$ ist ein Vektor, dessen Richtung durch die sogenannte Schraubenregel festgelegt ist. Stellt man sich nämlich vor, daß eine Rechtsschraube in Richtung des Stromes geschraubt wird, so gibt die Drehung der Schraube den Richtungssinn der magnetischen Induktion an. Diese Festsetzung wird dadurch begründet, daß sich ein kleiner Dauermagnet am Orte i_2 mit seinem Nordpol in diese Richtung einstellt. Im Magneten kreisen in Ebenen senkrecht zur Achse kleine elementare Kreisströme, sogenannte Molekularströme. Der Strom i_1 übt auf die Bahnen der Kreisströme so lange ein Moment aus, bis diese sich in Ebenen parallel zum Leiter, in dem i_1 fließt, einstellen und dadurch den Magneten in die senkrechte Richtung drehen.

Durch die Einführung der Feldgröße $\mathfrak{B}$ können die Kraftwirkung und ihre Ursache gesondert beobachtet und berechnet werden. Wenn die entsprechenden Feldgrößen aus den erzeugenden Strömen berechnet werden, braucht auf die Kraftwirkungen der Ströme nicht eingegangen zu werden. Ist dagegen das Feld bekannt, dann ist bei der Berechnung der Kraftwirkungen die Erzeugung des Feldes uninteressant.

Nimmt man das magnetische Feld als selbständig existierend an und fragt nicht nach seiner Ursache, dann kann folgende Behauptung aufgestellt werden: „Wirkt auf irgendein im Raum vorhandenes Leiterelement beim Stromdurchgang eine Kraft, so ist an dieser Stelle ein magnetisches Feld vorhanden."

Das Magnetfeld kann mit kleinen Magneten nachgewiesen werden, die sich durch die Kraftwirkung auf die in ihnen zirkulierenden Kreisströme in die Richtung von $\mathfrak{B}$ einstellen. Die geschlossene Linie, die sich aus der Richtung der Magnetnadel ergibt, wird *Induktionslinie* genannt.

Die Induktionslinien[4] kennzeichnen das Feld nach Richtung und Größe, wenn ihre durch die senkrecht zu $\mathfrak{B}$ liegende Einheitsfläche dem Zahlenwert von $\mathfrak{B}$ entspricht.

Umgibt man den langen geraden Leiter, der den Strom i_1 führt, konzentrisch mit homogenem ferromagnetischem Material, dann wächst die magnetische Induktion in diesem Material auf das μ_r-fache des Wertes im Vakuum an. Der Wert der Induktion ist dann in einem senkrecht zur Achse im Abstand a liegenden Punkt

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r i_1}{2\pi a}. \tag{1.23}$$

μ_r ist eine dimensionslose Zahl und wird *relative* Permeabilität des Stoffes genannt. Ihr Wert hängt bei ferromagnetischen Stoffen nicht nur vom Material, sondern auch von den das Feld erzeugenden Strömen ab (hier also von i_1) und außerdem noch vom vorherigen magnetischen Zustand des Stoffes. Im Falle

nichtferromagnetischer Stoffe kann μ_r für praktische Zwecke immer gleich Eins gesetzt werden.

Es ist zweckmäßig, die Abhängigkeit der Induktion in der Umgebung eines langen, geraden Leiters von der Entfernung einerseits sowie ihre Abhängigkeit vom Material der Umgebung und dessen magnetischem Zustand andererseits, wie sie in (1.23) ausgedrückt sind, voneinander zu trennen, indem man sagt, der Strom i_1 erzeugt in der vertikalen Entfernung a von der Leiterachse eine magnetische Feldstärke vom Betrage

$$H = \frac{i_1}{2\pi a}. \tag{1.24}$$

Diese Feldstärke erzeugt eine vom Material und dessen magnetischer Vergangenheit abhängige proportionale Induktion

$$\mathfrak{B} = \mu_0 \mu_r \mathfrak{H} = \mu \mathfrak{H}. \tag{1.25}$$

Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist ebenso wie die Induktion $\mathfrak{B}$ ein Vektor, dessen Richtung in isotropen nichtferromagnetischen sowie in magnetisch weichen Stoffen mit der Richtung der Induktion zusammenfällt. In homogenem ferromagnetischem Material liegt $\mathfrak{H}$ in der Richtung der Tangente an den Kreis senkrecht zur Achse des Leiters.

Die vorgenommene Zerlegung des AMPÈREschen Gesetzes ist bei ferromagnetischen Stoffen unbedingt notwendig, da die Änderung von μ_r mit einfachen mathematischen Ausdrücken nicht darzustellen ist. Sie ist nur aus den durch Versuche ermittelten Magnetisierungskurven zu entnehmen. Man kann z.B. den Strom i_1, der zur Erzeugung einer bestimmten Induktion $\mathfrak{B}$ notwendig ist, nicht unmittelbar berechnen, sondern muß zuerst die Feldstärke $\mathfrak{H}$ bestimmen. Diese Aufgabe ist nur lösbar, wenn die Funktion $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ oder wenn der Wert von μ_r bekannt ist. Die magnetische Feldstärke wird bei elektrotechnischen Aufgaben im Gegensatz zur magnetischen Induktion nur als Hilfsgröße betrachtet.

Es wäre sinnvoller, den Vektor $\mathfrak{B}$ als magnetische Feldstärke zu bezeichnen, da dieser die Stärke der magnetischen Kraftwirkung beschreibt und als deren Ursache angesehen werden kann. Der Vektor $\mathfrak{H}$ wäre dann magnetische Erregung zu nennen und als Ursache der Induktion aufzufassen. Leider sind die historischen Bezeichnungen in der Literatur so fest verankert, daß sie heute trotz ihrer irreführenden Bedeutung schwerlich geändert werden können.[1])

Das Produkt aus relativer Permeabilität μ_r und der Permeabilität des Vakuums μ_0 wird *absolute* Permeabilität genannt. Diese ist das Verhältnis der magnetischen Induktion zur magnetischen Feldstärke

$$\mu_r \cdot \mu_0 = \mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}. \tag{1.26}$$

---

[1]) In vielen deutschen und österreichischen Veröffentlichungen wird allerdings bereits entsprechend verfahren.

Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke entlang einer beliebigen offenen Kurve wird „magnetische Spannung“, entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve „magnetische Umlaufspannung“ genannt. Bildet man das Linienintegral längs eines Kreises mit dem Radius r um einen geraden Leiter, so wird

$$\oint_{\text{Kreis}} H\, ds = 2\pi r H = 2\pi r \frac{i}{2\pi r} = i. \tag{1.27}$$

Die magnetische Umlaufspannung ist gleich der umschlossenen Stromstärke i.

Dieser Zusammenhang gilt allgemein für jede beliebige geschlossene Kurve und für beliebig viele umschlossene Ströme:

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \sum_{\varkappa} i_{\varkappa} = \Theta. \tag{1.28}$$

Diese Gleichung stellt das sogenannte *Durchflutungsgesetz* dar. Es ist auch experimentell nachweisbar und sagt aus, daß das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs einer geschlossenen Kurve gleich ist der algebraischen Summe aller Ströme, die die von der geschlossenen Kurve umrandete Fläche durchfluten.

Das Durchflutungsgesetz hat eine ähnliche Bedeutung wie der Satz von GAUSS, der besagt, daß der dielektrische Fluß durch eine geschlossene Fläche gleich der eingeschlossenen Gesamtladung ist. Das Durchflutungsgesetz liefert für beliebig angeordnete Leitersysteme einen allgemein gültigen Zusammenhang zwischen den Strömen und dem von ihnen erzeugten magnetischen Feld und enthält entsprechend dieser Vorstellung eine dem AMPÈREschen Gesetz gleichwertige verallgemeinerte Aussage.

Zusammenfassend kann man sagen, daß der Strom in einem Leiter einer „magnetomotorischen Kraft“ entspricht, die in jedem Punkt des Raumes eine magnetische Feldstärke hervorruft. Diese bestimmt dann die magnetische Induktion.

Die Größe der magnetomotorischen Kraft ist ausschließlich von der Summe der umschlossenen Ströme abhängig. Die Feldstärke in den einzelnen Punkten der geschlossenen Kurve wird von der Verteilung der magnetomotorischen Kraft längs der Kurve bestimmt. Maßgebend dafür ist die Permeabilität des Mediums und seine Anordnung. Die Induktion ist das Produkt aus Feldstärke und Permeabilität im betrachteten Punkt. CULLWICK (Lit. A [1]) weist mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie nach, daß die elektromagnetischen Wirkungen zwischen bewegten Ladungen als Folge elektrostatischer Kräfte auftreten. Das Gesetz von AMPÈRE ist demnach eine Variante des COULOMBschen Gesetzes und kann daraus abgeleitet werden. Das COULOMBsche Gesetz wird damit zum gemeinsamen Grundgesetz der elektrischen und magnetischen Felder (Lit. A [3]).

Der Beweis hierfür soll nachstehend kurz geführt werden. Nach der speziellen Relativitätstheorie nimmt ein Beobachter ein elektrisches oder magnetisches Feld unverändert wahr, wenn er sich parallel dazu bewegt. Bewegt er

sich jedoch mit der Geschwindigkeit v senkrecht dazu, dann erscheinen die Felder nur bei einem bestimmten Verhältnis der Geschwindigkeit des Beobachters zur Feldgeschwindigkeit unverändert. Dieses beträgt $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Zwei beliebige Stromelemente zweier paralleler Leiter denkt man durch bewegte Ladungen mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 ersetzt. Dabei sind

$$i_1\, ds_1 = Q_1 v_1 \quad \text{und} \quad i_2\, ds_2 = Q_2 v_2 .$$

Bei einem Leitungsstrom stellt man sich vor, daß die positiven Ladungen Q im Leiter ruhen und die negativen Ladungen sich mit kleinen mittleren Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bewegen (Abb. 1).

Die ruhende Ladung Q im Punkt C wird in Richtung v_2 bzw. senkrecht dazu von der ruhenden Ladung Q in A abgestoßen mit einer Kraft

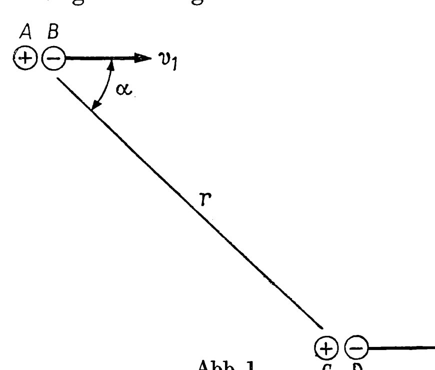


Abb. 1

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha \quad \text{bzw.} \quad \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha .$$

Die bewegliche Ladung in B mit entgegengesetzter Polarität übt eine anziehende Kraft aus:

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha \quad \text{bzw.} \quad \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} .$$

Die ersten Komponenten heben sich gegenseitig auf, die Resultierende der beiden anderen ergibt

$$P_c = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - 1\right) \approx \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha \left(\frac{v_1^2}{2c^2}\right),$$

da $v_1 \ll c$. Diese Kraft wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Der sich mit der Ladung in D bewegende Beobachter findet, daß diese Ladung von der beweglich erscheinenden Ladung in A mit entgegengesetzter Polarität in der Bewegungsrichtung bzw. senkrecht dazu angezogen wird mit einer Kraft

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha \quad \text{bzw.} \quad \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} .$$

Die Ladung in B von gleicher Polarität, die sich mit einer relativen Geschwindigkeit $(v_1 - v_2)$ zum Beobachter bewegt, übt eine abstoßende Kraft aus:

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha \quad \text{bzw.} \quad \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha\,\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(v_1-v_2)^2}{c^2}}}\,.$$

Die ersten beiden Glieder heben sich ebenfalls wieder auf, und die resultierende Kraftwirkung senkrecht zu v_2 ergibt sich aus der Differenz der übrigen Komponenten zu

$$P'_c = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha\left(\frac{v_1 v_2}{c^2} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right).$$

Der Beobachter, der sich mit der Ladung in D bewegt, stellt also gegenüber einem ruhenden Beobachter ein im Verhältnis $1 : \sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}$ verkleinertes elektrisches Feld fest. Der Beobachter, der sich jeweils an dem gleichen Ort mit der Ladung in D befindet, bemerkt also, daß an der beweglichen Ladung in D eine $\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}$-fache Kraft wirkt. Die wirksame Kraft beträgt

$$P_D = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha\left(\frac{v_1 v_2}{c^2} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right)\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}\,.$$

Zwischen beiden Ladungspaaren tritt daher nachstehende Kraft auf:

$$P = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha\left[\frac{v_1^2}{2c^2} + \left(\frac{v_1 v_2}{c^2} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right)\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}\right].$$

Da die höheren Potenzen von v/c vernachlässigt werden können, gilt

$$P = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha\,\frac{v_1 v_2}{c^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{Q v_1 \cdot Q v_2}{r^2}\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\cdot\frac{i_1\,ds_1 \cdot i_2\,ds_2}{r^2}\sin\alpha\,.$$

Damit ist die Differentialform des AMPÈREschen Gesetzes gefunden. Hieraus kann die für eine Länge s zweier paralleler Leiter gültige Form durch Integration gewonnen werden. Diese Ableitung beweist die Relation

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} = c$$

zwischen der Permeabilität und der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums. Bei der Ableitung ist nur die langsame Driftgeschwindigkeit der Elektronen berücksichtigt worden. Die resultierende Wirkung der unregelmäßigen thermischen Bewegung großer Geschwindigkeit wird gleich Null.

Das AMPÈREsche Gesetz erklärt auch die Erscheinung der „dynamischen Induktion". Bewegt man einen Leiter mit ruhenden Ladungen in der Nähe bewegter Ladungen, also in der Nähe eines stromführenden Leiters, dann wirkt auf die Ladungen eine Kraft.

Man kann das auch anders ausdrücken, indem man sagt, der fließende Strom erzeugt im Leiter ein magnetisches Feld und dieses übt auf die Ladungen des in diesem Feld bewegten Leiters eine Kraft aus. In diesem Leiter wird also ein elektrisches Feld induziert. Eine sich mit der Geschwindigkeit v bewegende Ladung Q ist einem Stromelement $I\,ds = Qv$ gleichwertig. Auf die senkrecht zur Feldrichtung des magnetischen Feldes bewegte Ladung wirkt also die Kraft

$$P = BI\,ds = BQv. \tag{1.29}$$

Diese Kraft wirkt auf jede Ladung des in einem magnetischen Feld bewegten Leiters. Man kann auch sagen, daß durch die Bewegung in einem Leiter eine Feldstärke

$$E = Bv \tag{1.30}$$

erzeugt wird und daß diese Feldstärke die Kraft

$$P = EQ = BQv \tag{1.31}$$

ausübt.

Wird dementsprechend ein Leiter der Länge s in einem Magnetfeld senkrecht zu sich und zu den Kraftlinien bewegt, so wird in ihm eine Spannung

$$u_{\text{ind}} = E \cdot s = B \cdot s \cdot v \tag{1.32}$$

induziert.

Die permanenten Magnete und die Vorstellung der Magnetpole stellen anschauliche Hilfsmittel dar, die magnetischen Erscheinungen und Wirkungen zu demonstrieren. So ist es in Lehrbüchern üblich, das magnetische Feld aus dem Verhalten permanenter Magnete einzuführen. Das ist der Grund, weshalb die magnetischen Erscheinungen heute vielfach als ein gesondertes Gebiet betrachtet werden, obwohl das magnetische Feld auch bei permanenten Magneten immer von bewegten Ladungen erzeugt wird. Um den Zusammenhang zwischen beiden Darstellungen zu zeigen, soll hier eine kurze Zusammenfassung der Magnetostatik gegeben werden. Es muß hierbei aber auch auf die damit verbundenen Unzulänglichkeiten hingewiesen werden.

Bestimmte magnetische Materialien stellen sich – frei beweglich aufgehängt – in die Nord-Süd-Richtung ein und ziehen Eisenfeilspäne an. Diese verdichten sich an den Flächen, die nahe den beiden Magnetenden, den Polen, gelegen sind.

Die Polstärken dieser Pole werden den elektrischen Ladungen äquivalent angesehen, so daß das elektrostatische und das magnetische Feld formal ähnlich beschrieben werden können. Obwohl die beiden Pole eines Magneten nicht voneinander getrennt werden können, nimmt man getrennte punktförmige magnetische Pole an, um die Kraftwirkungen bequemer untersuchen zu können. Man sagt, daß überall dort ein Magnetfeld existiere, wo auf einen Magnet-

pol eine Kraft einwirkt. Der Vektor, der Richtung und Größe der auf den Einheitspol wirkenden Kraft kennzeichnet, wird magnetische Feldstärke genannt.

Stoffe, die man in ein magnetisches Feld bringt, werden in verschiedenem Maße selbst magnetisch.

Ein Maß für die Magnetisierbarkeit eines Stoffes ist seine Permeabilität. Die relative Permeabilität μ_r ist eine Zahl, die angibt, wie groß die Permeabilität eines Materials gegenüber der Permeabilität des Vakuums ist.

Der in isotropem Material mit der Feldstärke gleichgerichtete Vektor, der das Produkt aus Feldstärke und Permeabilität ist, wird magnetische Induktion genannt.

Die Vektoren des Magnetfeldes können aus der zwischen den Polen beobachteten Kraftwirkung abgeleitet werden. Man muß dazu das für die Polstärken (magnetische Mengen) m_1 und m_2 im Abstand a gültige COULOMBsche Gesetz

$$P = \frac{1}{4\pi\mu_0\mu_r} \frac{m_1 \cdot m_2}{a^2} \tag{1.33}$$

so auffassen, daß die Polstärke m_1 am Ort von m_2 ein Feld mit der Feldstärke

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0\mu_r} \frac{m_1}{a_2} \tag{1.34}$$

erzeugt und dieses Feld auf m_2 eine Kraft ausübt.

In der Physik drückt man die Kennwerte des magnetischen Feldes durch das COULOMBsche Gesetz der Magnetpole, in der Elektrotechnik durch das Durchflutungsgesetz aus. Dies führt erfahrungsgemäß aus folgenden Gründen zur Verwirrung. Die Physiker betrachten konstante magnetische Mengen und beobachten die Kraftwirkung, die diese aufeinander in Luft ausüben. Dadurch ist die Feldstärke definierbar. Werden die beiden magnetischen Mengen in eine Flüssigkeit mit der Permeabilität μ_r gebracht, z. B. in Ferrichlorid, dann verringert sich die Kraftwirkung auf den μ_r-ten Teil. Das μ-fache der magnetischen Feldstärke wird magnetische Induktion genannt. Man kann daraus schließen, daß die Induktion eine vom Material unabhängige Konstante ist, während die Feldstärke von der Permeabilität des Materials abhängt.

Die Elektrotechniker dagegen definieren die magnetische Feldstärke in der Entfernung r von einem langen geraden Leiter auf Grund des Durchflutungsgesetzes. Ist z. B. der Leiter mit einem Eisenring vom mittleren Radius r umgeben, so herrscht in ihm eine Induktion μH. Man kann daraus schließen, daß die Feldstärke vom Strom abhängig und vom Material unabhängig ist, während sich die Induktion mit der Permeabilität verändert.

Beide Definitionen sind in der genannten Form formuliert und verallgemeinert unrichtig. Es gibt keine konstanten magnetischen Mengen, sondern nur permanente Magnete. Dabei ist der magnetische Zustand davon abhängig, wie der magnetische Kreis geschlossen ist. Ist die Umgebung mit magnetischem Material erfüllt, dann ändert sich die Polstärke. In den physikalischen Lehrbüchern ist deshalb auch meist nicht festgelegt, daß die punkt-

förmigen magnetischen Mengen als konstant angenommen werden sollen, denn offensichtlich würde diese Annahme zu unrichtigen Vorstellungen führen.

Die Definitionen der Elektrotechniker treffen nur dann zu, wenn sich längs des Kreises mit dem Radius r ein Ring aus Material mit konstanter Permeabilität befindet und dieser Ring geschlossen ist. Sind längs dieses Kreises Stoffe verschiedener Permeabilität vorhanden, so ändert sich dadurch die Verteilung der magnetischen Randspannung. Die Feldstärke in den einzelnen Punkten ist nicht gleich.

Bei beliebiger Stromverteilung und verschiedenen Materialien unterschiedlicher Permeabilität ist das Durchflutungsgesetz immer gültig. Seine Anwendung ist zwar nicht immer einfach, doch sind daraus die qualitativen Verhältnisse immer richtig ersichtlich.

Die Gesamtheit der durch eine Fläche tretenden Induktionslinien, also das Flächenintegral der Normalkomponente der Induktion

$$\Phi = \int \mathfrak{B}\, d\,\mathfrak{F}, \tag{1.35}$$

wird magnetischer Fluß oder *Induktionsfluß* genannt.

Den Fluß durch eine von einer einzelnen Leiterschleife begrenzten Fläche nennt man *Windungsfluß*. Die gesamte Induktionslinienverkettung der Windungen einer Spule nennt man *Spulenfluß* oder verketteten Fluß.

Sämtliche Induktionslinien einer dicht gewickelten Ringspule verlaufen praktisch innerhalb der Windungen. Demzufolge ist jede der w Windungen mit der gleichen Anzahl von Induktionslinien verkettet, und der Spulenfluß ist

$$\Phi_s = w\Phi = w \int \mathfrak{B}\, d\,\mathfrak{F} = w \int \mu_r \mu_0\, \mathfrak{H}\, d\mathfrak{F}. \tag{1.36}$$

Sind die Windungszahl/cm und der Querschnitt konstant, ferner das Material des Ringes homogen, dann ist die Feldstärke längs der Kraftlinien des Ringes überall gleich, da auch die Durchflutung wi der inneren Leiter konstant ist. Aus dem Durchflutungsgesetz folgt, wenn s die Länge der Spule ist,

$$H = \frac{wi}{s}.$$

Somit gilt

$$\Phi_s = w \int \mu_r \mu_0 \frac{wi}{s}\, dF = iw^2 \int \frac{\mu_r \mu_0\, dF}{s} = iw^2 \Lambda. \tag{1.37}$$

Λ ist der *magnetische Leitwert* des betrachteten Feldabschnittes und $w^2\Lambda = L$ die *Selbstinduktivität* der Ringspule. Wird der Fluß von dem Stromkreis einer anderen Ringspule erzeugt, dann ist $w_1 w_2 \cdot \Lambda = M$ die *gegenseitige Induktivität*. Sie ist der Proportionalitätsfaktor zwischen der Flußverkettung und dem erzeugenden Strom. Die Selbstinduktivität L und die Gegeninduktivität M hängen nur von den geometrischen Abmessungen und dem Material der Anordnung ab; es gilt

$$\Phi_s = Li \quad \text{bzw.} \quad \Phi_s = Mi. \tag{1.38}$$

Gewöhnlich ist bei stromführenden Leitern die gegenseitige Lage nicht wie bei einer Ringspule symmetrisch und damit das magnetische Feld nicht homogen. Die Berechnung wird noch komplizierter, weil die Kraftlinien teilweise innerhalb der Leiterquerschnitte verlaufen. In den meisten Fällen ist jedoch der Leiterquerschnitt im Verhältnis zum umgebenden Raum so klein, daß die hierauf entfallenden Kraftlinien vernachlässigt werden können.

Bei derart inhomogenen Feldern muß die Induktion für jeden Punkt des Feldes analytisch oder graphisch bestimmt werden. Die Ergebnisse sind für die gesamte vom Leiter umrandete Fläche zu summieren. Bei mehreren Windungen müssen die Flüsse der einzelnen Windungen addiert werden. Die Stromstärke wird durch Integration der Stromdichte G über den Querschnitt ermittelt. Der Quotient aus dem so ermittelten Spulenfluß und der Stromstärke ist die Induktivität:

$$L = \frac{\sum\limits_k w_k \int\limits_{F_{w_k}} \mathfrak{B}\, d\,\mathfrak{F}}{\int\limits_{F_i} \mathfrak{G}\, d\,\mathfrak{F}}\,. \tag{1.39}$$

Enthält die Anordnung kein Eisen und ist jede Windung mit dem gleichen Fluß verkettet, kann mit der magnetischen Leitfähigkeit und der Windungszahl gerechnet werden. Bei Spulen mit Eisenkernen sind die Permeabilität und damit auch die Induktion als Funktionen der Stromstärke nicht konstant.

Die Relation zwischen Φ_s und i besteht auch dann, wenn sich beide Größen langsam verändern. Im ruhenden Leitersystem hat bei konstantem L entsprechend dem im nächsten Abschnitt behandelten Induktionsgesetz die induzierte Spannung den Wert

$$u_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_s}{dt} = \frac{di}{dt} L\,. \tag{1.40}$$

Enthält die Anordnung Eisen, so ist die Induktivität nicht konstant, und die induzierte Spannung wird

$$u_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_s}{di} \cdot \frac{di}{dt}\,; \quad L = \frac{d\Phi_s}{di}\,. \qquad (1.41);\ (1.42)$$

Die Änderung des Induktionsflusses mit der Stromstärke läßt sich dann am einfachsten aus der Magnetisierungskurve graphisch bestimmen.

Mit Hilfe des Induktivitätsparameters kann also das Verhalten einer Ringspule oder eines beliebigen Stromkreisabschnittes anstatt durch die elektrischen und magnetischen Feldvektoren mit den leicht meßbaren Integralgrößen Spannung $\int\limits_s \mathfrak{E}\, d\,\mathfrak{s}$ und Stromstärke $\int\limits_F \mathfrak{G}\, d\mathfrak{F}$ in sehr guter Annäherung beschrieben werden.

Dieses Verfahren ist zulässig, solange die Strom- und Spannungsänderungen nicht zu rasch erfolgen; weiterhin, wenn die Abmessungen der Spule oder des Leiters genügend klein sind, damit sich die Induktion auch in den entferntesten Punkten des betrachteten

Feldabschnittes gleichzeitig mit dem Leiterstrom verändert. Erreicht nämlich das magnetische Feld den zu bestimmten Momentanwerten des Stromes gehörenden Induktionswert in einzelnen Punkten erst dann, wenn sich der Momentanwert des Stromes bereits wesentlich geändert hat, so besteht keine eindeutige Beziehung zwischen Strom und magnetischem Fluß.

Ist die Frequenz sehr groß, dann erzeugt nach den Überlegungen des nächsten Abschnittes das vom Wechselstrom erzeugte elektrische Wechselfeld ein magnetisches Feld, das wieder auf das ursprüngliche Feld rückwirkt. An der Erzeugung des Flusses ist außer dem Leiterstrom der Verschiebungsstrom beteiligt; Φ ist dann nicht mehr proportional i.

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (1.41) mit $i\,dt$, dann ergibt sich für die magnetische Feldenergie W einer vom Strom i durchflossenen Spule aus

$$u_{\text{ind}}\, i\, dt = i\, d\Phi_s = L\, i\, di$$

der Wert

$$W = \int_0^{\Phi_s} i\, d\Phi_s = \int_0^{i_t} i\, L\, di. \tag{1.43}$$

Diese Energie wird aus der Stromquelle in das magnetische Feld hineingebracht. Dabei charakterisiert die Induktivität die Trägheit der Energieauffüllung des Feldes.

1.24 Das Vektorpotentialfeld

Das FARADAYsche Induktionsgesetz ist die experimentelle Grundlage für die von beschleunigten Ladungen herrührenden Kräfte. Es erklärt jedoch die Kraftwirkung durch Zwischenschaltung des magnetischen Feldes, indem es besagt, daß ein veränderliches Magnetfeld, also ein veränderlicher Induktionsfluß, ein elektrisches Feld erzeugt, dessen Linienintegral entlang einer geschlossenen Kurve gleich der zeitlichen Änderung des hindurchgreifenden Induktionsflusses ist:

$$\oint \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{1.44}$$

Das veränderliche Magnetfeld wird von beschleunigten Ladungen, also von Strömen veränderlicher Stärke, erzeugt. Die Existenz eines elektrischen Feldes bedeutet, daß auf elektrische Ladungen im elektrischen Feld eine Kraft wirkt. Das FARADAYsche Gesetz besagt also, daß infolge der beschleunigten Bewegung von Ladungen auf die in ihrer Umgebung befindlichen Ladungen eine Kraft wirkt.

Aus der nur für geschlossene Leiterschleifen gültigen Formel (1.44) kann man durch den folgenden Gedankengang einen Ausdruck für die von beschleunigten Ladungen herrührende Kraft erhalten.

Das Ergebnis dieses Gedankenganges führt zu einer Verallgemeinerung, die in dem einheitlichen Bild als grundlegend angesehen werden kann. Das kann jedoch nicht unmittelbar bewiesen werden, sondern nur dadurch, daß die Schluß-

folgerungen mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmen. Der magnetische Fluß wird aus einer Größe definiert, deren Linienintegral für die betrachtete geschlossene Schleife dem magnetischen Fluß der Schleife entspricht. Sie wird mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet und Vektorpotential genannt:

$$\Phi = \int_F \mathfrak{B}\, d\mathfrak{F} = \oint \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s}. \tag{1.45}$$

Dabei wird $\mathfrak{B}$ über die Fläche integriert, entlang deren Randlinie die Liniensummation von $\mathfrak{A}$ gebildet wird.

Formt man das Linienintegral mit Hilfe des STOKESschen Satzes in ein Flächenintegral um, so erhält man

$$\int_F \mathfrak{B}\, d\mathfrak{F} = \int_F \operatorname{rot} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{F}. \tag{1.46}$$

Wird dies für jedes Flächenelement als gültig angenommen, so ist

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}. \tag{1.47}$$

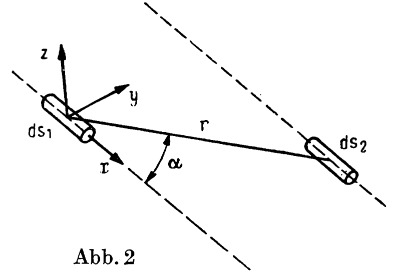


Abb. 2

Mit Hilfe dieser Beziehung[5] soll nun ermittelt werden, wie groß die Feldstärke ist, die von dem veränderlichen Strom i_1 eines Elementes ds_1 einer aus einem langen parallelen Doppelleiter gebildeten Schleife in dem Element ds_2 des anderen Zweiges der Schleife induziert wird.

Das im Ursprung des Koordinatensystems (Abb. 2) in Richtung der x-Achse befindliche Stromelement $i_1\, ds_1$ erzeugt an der Stelle des Leiterelementes ds_2 in der Entfernung r in der Richtung der jeweiligen Achsen, entsprechend der Differentialform des AMPÈREschen Gesetzes, die Induktionskomponenten

$$B_x = 0,$$

$$B_y = 0,$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{i_1\, ds_1}{r^2} \sin\alpha = \frac{\mu_0 \mu_r i_1 d s_1}{4\pi} \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{y^2+x^2})^2}.$$

Wegen (1.47) gilt

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\mu_0 \mu_r\, i_1\, ds_1}{4\pi} \cdot \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daraus folgt für die Komponenten des Vektorpotentials an der Stelle $d s_2$ durch die Wirkung von $d s_1$

$$A_z = 0, \quad A_y = 0, \quad A_x = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{i_1 \, d s_1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{i_1 \, d s_1}{r}.$$

Das gesamte Vektorpotential an der Stelle $d s_2$ ergibt sich durch Addition der Beträge aller Schleifenelemente zum Werte von $\mathfrak{A}$:

$$(\mathfrak{A}_x)_{d s_2} = \frac{1}{4\pi} \oint \mu_0 \mu_r \frac{i \, d \mathfrak{s}}{r}.$$

Das Linienintegral längs der Schleife ist gleich dem Induktionsfluß

$$\Phi = \oint (\mathfrak{A}_x)_{d s_2} = \oint \oint \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{i \, d \mathfrak{s}}{r} \, d \mathfrak{s}.$$

Nach der FARADAYschen Fassung des Induktionsgesetzes ist die in der Schleife induzierte Spannung gleich der zeitlichen Änderung des eingeschlossenen Flusses

$$\oint \mathfrak{E} \, d \mathfrak{s} = - \frac{d}{dt} \oint \oint \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{i \, d \mathfrak{s}}{r} \, d \mathfrak{s}. \tag{1.48}$$

Unter der Voraussetzung, daß (1.48) für jedes Leiterelement gilt und daß die in einem bestimmten Element induzierte Feldstärke die Resultierende der von den Stromstärkeänderungen der einzelnen Leiterelemente induzierten Feldstärken ist, gilt

$$\mathfrak{E}_{d s_1} = - \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} d \mathfrak{s} \cdot \frac{d i}{d t} \cdot \frac{1}{r}, \tag{1.49}$$

wobei $\mathfrak{E}_{d s_1}$ die von einem bestimmten Leiterelement $d s_1$ an der Stelle eines anderen Elementes induzierte Feldstärke bedeutet. $\mathfrak{E}$ ist die Resultierende aller Feldstärkenbeiträge. Die Stromstärkeänderung eines isoliert betrachteten Stromelementes $i_1 \, d s_1$ wirkt unabhängig von den übrigen Teilen des Stromkreises auf eine in der Entfernung r befindliche Ladung Q_2 mit der Kraft

$$\mathfrak{P} = Q_2 \mathfrak{E}_{d s_1} = -\mu_0 \frac{Q_2 \, d \mathfrak{s}_1}{4\pi r} \cdot \frac{d i_1}{d t}.$$

Ersetzt man das Stromelement $i_1 \, d s_1$ durch eine bewegte Ladung Q_1 mit der Geschwindigkeit v_1, dann wird

$$\mathfrak{P} = \frac{\mu_0 Q_1 Q_2}{4\pi r} \frac{d \mathfrak{v}_1}{d t} = - \frac{\mu_0 Q_1 Q_2}{4\pi r} \cdot \dot{\mathfrak{v}}_1. \tag{1.50}$$

Dies ist die grundlegende Formel für die von beschleunigten Ladungen erzeugten Kraftwirkungen.

Betrachtet man wieder die Kraftwirkung auf Q_2 als die Folge eines von Q_1 am Ort von Q_2 erzeugten elektrischen Feldes, so kann man dieses als die zeitliche Änderung des Vektorpotentialfeldes beschreiben,

$$\mathfrak{E} = -\frac{d\mathfrak{A}}{dt}, \tag{1.51}$$

und erhält

$$\mathfrak{P} = -Q_2 \frac{d\mathfrak{A}}{dt} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{A} = \frac{\mu_0 i_1\, d\mathfrak{s}_1}{4\pi r} = \frac{\mu_0 Q_1 \mathfrak{v}_1}{4\pi r}. \tag{1.52}$$

Die Richtung des Vektorpotentials fällt mit der Richtung des als Gerade angenommenen Stromelements zusammen, ähnlich wie die Richtung der Kraft. Bei mehreren felderzeugenden Stromelementen werden die Vektorpotentiale addiert.

Für das von einer Stromschleife erzeugte Vektorpotential und für die Feldstärke in irgendeinem Punkt des Feldes gilt dann

$$\mathfrak{A} = \oint \frac{\mu_0 i\, d\mathfrak{s}}{4\pi r}, \tag{1.53}$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{di}{dt} \cdot \frac{d\mathfrak{s}}{r}. \tag{1.54}$$

Zur vollständigen Charakterisierung des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ muß neben seiner Rotation auch seine Divergenz angegeben werden. Das wird im Abschnitt 1.4 behandelt.

Während das FARADAYsche Gesetz nur das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ angibt, kann mit Hilfe des Vektorpotentials die Feldstärke in jedem Punkt des Feldes berechnet werden. Das Vektorpotential ist unmittelbar aus den Strömen zu berechnen und liefert einen direkten Zusammenhang zwischen der beschleunigten Ladung und dem von ihr induzierten elektrischen Feld. Seine Anwendung ist, wie später noch gezeigt wird, von besonderer Bedeutung bei Radiowellen und der Lösung von Hochfrequenzproblemen. Aber auch für die Berechnung von statischen Magnetfeldern ist die Anwendung des Vektorpotentials von großem Nutzen. Darauf wird ebenfalls noch ausführlich eingegangen. Ein Vektorpotentialfeld kann auch dort existieren, wo kein Magnetfeld vorhanden ist. Ein von einem unendlich langen Solenoid erzeugter Fluß erzeugt z. B. bei seiner Änderung auf einer beliebigen umschließenden Kurve eine Spannung. Auf einer außerhalb des Solenoids liegenden Kurve ist im Idealfall zwar kein Magnetfeld, aber ein Vektorpotentialfeld vorhanden.

Es wurde bereits gesagt, daß es zweckmäßig ist, sich im Falle der Bewegungsinduktion des magnetischen Feldes und bei der Ruheinduktion des Vektorpotentials zu bedienen. Es ist üblich, diese beiden Gesetze zu verbinden und eins aus dem anderen abzuleiten. Führt man Berechnungen im Falle der Ruheinduktion mit Hilfe des magnetischen Feldes bzw. im Falle der Bewegungsinduktion mit Hilfe des Vektorpotentialfeldes durch, so kann man

nur die gesamte induzierte Spannung ermitteln. Die Feldstärke in den einzelnen Punkten ergibt sich dabei nicht.

Da außerhalb eines langen Solenoids kein Magnetfeld vorhanden ist, kann die induzierte Feldstärke in den einzelnen Punkten mit Hilfe des magnetischen Feldes nicht berechnet werden. In der Umgebung eines geraden Leiters verlaufen die Vektorpotentiallinien parallel zum Leiter. Auch in diesem Falle kann die induzierte Feldstärke in den zum Leiter senkrechten Seiten einer rechteckigen, sich parallel zum Leiter bewegenden Schleife nicht aus der Änderung der Vektorpotentiale berechnet werden.

1.25 Wellenausbreitung

Mit Hilfe des Vektorpotentials kann die Beziehung zwischen der in jedem Punkt des Raumes erzeugten elektrischen Feldstärke und den induzierenden Strömen ermittelt werden. Üben elektrische Ladungen infolge ihrer Lage oder Bewegung in weit entfernten Punkten Kräfte aus, dann ist zur Fortpflanzung dieser Kraftwirkung eine bestimmte Zeit erforderlich.

Das entspricht nach den bisher vertretenen Vorstellungen einer „Verzögerung" der Fernwirkung. Diese wirkt in der Entfernung r in der Zeit $\frac{r}{c}$. Will man das statische oder das Vektorpotential in einem Punkt im Abstand r zur Zeit t berechnen, dann muß man den Ort der erzeugenden Ladung zur Zeit $t - \frac{r}{c}$ bzw. den zur Zeit $t - \frac{r}{c}$ vorhandenen Augenblickswert des Stromes berücksichtigen.

Es gilt also

$$\mathfrak{A}_{t,r} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_{(t-r/c)}\, d\mathfrak{s}}{r} \tag{1.55}$$

und

$$V_{t,r} = \frac{Q_{(t-r/c)}}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{1.56}$$

Aus $\mathfrak{A}$ und V ergibt sich dann die Feldstärke, wenn $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor in Richtung der maximalen Änderung von V ist:

$$\mathfrak{E} = -\frac{dV}{dn}\mathfrak{n} \tag{1.57}$$

bzw.

$$\mathfrak{E} = -\frac{d\mathfrak{A}}{dt}. \tag{1.58}$$

Durch die Einführung des Vektorpotentials wird der Begriff des Magnetfeldes nicht mehr benötigt. Ebenso kann auch auf die Verwendung des Verschiebungsstromes verzichtet werden. Durch das Vektorpotential wird es über-

flüssig, das Durchflutungsgesetz auf den Verschiebungsstrom zu erstrecken und den Kreis der Leiterströme durch den Verschiebungsstrom zu schließen. Ebenso ist es unnötig, die Erzeugung des elektrischen Feldes in den vom Ausgangsstromkreis weit entfernten Punkten der Änderung des Magnetfeldes zuzuschreiben, weil man mit Hilfe des Vektorpotentials die in jedem Punkt des Feldes induzierte Feldstärke unmittelbar mit den Strömen des erregenden Stromkreises in Beziehung setzen kann.

Das Vektorpotential zeigt eine formale Analogie zum Skalarpotential, ist aber eine im wesentlichen davon abweichende Größe. Es wird später gezeigt, daß ein Vektorfeld, in dem $\oint \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = 0$ und $\oint \mathfrak{v}\, d\mathfrak{F} = 0$ oder entsprechend $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ sind, also ein Feld, das weder Wirbel noch Quellen besitzt, wie z. B. die stromfreien Teile eines Magnetfeldes, sowohl Skalar- als auch Vektorpotential besitzt. Beide Potentiale sind vollständig verschiedene Größen.

Diese Tatsache wird im Abschnitt 2.21 (Erzeugung von Magnetfeldern) bestätigt. Dasselbe Problem wird auch an Hand der MAXWELLschen Gleichungen in Abschnitt 1.4 besprochen.

1.26 Zusammenfassung

Geladene Teilchen üben entsprechend ihrer relativen Lage und Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung aufeinander Kräfte aus.

In der Umgebung einer ruhenden Ladung besteht ein elektrostatisches Feld, in der Nähe einer gleichförmig bewegten Ladung ein magnetisches Feld und in der Nähe einer beschleunigten Ladung ein Vektorpotentialfeld. Durch diese Felder werden die Kraftwirkungen übertragen. Die Kraftwirkung wird immer der Wirkung eines elektrischen Feldes zugeschrieben. Im Falle des magnetischen und des Vektorpotentialfeldes wird das der Kraftwirkung entsprechende elektrische Feld durch elektromagnetische Induktion erzeugt. Die resultierende Feldstärke und damit die auf eine Ladung Q wirkende Kraft ist die Resultierende der drei Komponenten. Hiervon kann gegebenenfalls die eine oder andere fehlen.

Das bisher Gesagte gilt für eine große Zahl von Ladungen, und $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ sind die resultierenden Wirkungen aller Ladungen.

Es ist experimentell erwiesen, daß jede Feldänderung, die zu einer Änderung der Kraftwirkung zwischen Ladungen führt, sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet.

1.3 DAS FLUSSBILD

Im vorangehenden Abschnitt wurden die elektromagnetischen Grundbeziehungen unmittelbar aus den Grundgesetzen über die Kräfte zwischen elektrischen Ladungen abgeleitet. Ihre experimentelle Bestätigung waren die Gesetze von COULOMB, AMPÈRE und FARADAY. Damit sind die physikalischen Zusammenhänge am besten zu übersehen. In der Elektrotechnik dagegen

werden für die Berechnung des elektromagnetischen Feldes anschauliche und einfache Feldvorstellungen bevorzugt. Die grundlegenden Gesetze und Begriffe werden auf Grund experimentell erwiesener Tatsachen eingeführt. Hierbei wird von den experimentell unmittelbar schwer faßbaren Kraftwirkungen zwischen den Ladungen völlig abgesehen. Die durch Kraftlinien versinnbildlichte Darstellung des elektromagnetischen Feldes wird den Ergebnissen der auf dem Flußbild beruhenden Versuche entnommen.

Das magnetische und das elektrische Feld werden hierbei als primäre physikalische Wirklichkeit betrachtet. In der Starkstromtechnik braucht oftmals, im Gegensatz zur elektromagnetischen Wellenausbreitung, auf einander aufbauende elektrische und magnetische Felder nicht eingegangen zu werden. Diese Erscheinungen werden, soweit erforderlich, durch Einführung des Verschiebungsstromes in den Kreis der Betrachtungen einbezogen. Dazu ist die Erweiterung des Durchflutungsgesetzes notwendig.

In der Elektrotechnik wird die Kraftwirkung der von elektrischen Ladungen erzeugten elektrischen und magnetischen Felder zur Verschiebung anderer Ladungen, also zur Erzeugung elektrischer Ströme, ausgenützt. Im allgemeinen bedient man sich, entsprechend der bisherigen Ausdrucksweise, der Kraftwirkungen eines magnetischen oder Vektorpotentialfeldes. Der zur Erzeugung z. B. eines Magnetfeldes erforderliche konstante Strom kann durch das magnetische Feld der Molekularströme entstehen, die den remanenten Magnetismus eines Gleichstromgenerators aufrechterhalten oder durch einen Erregerstromkreis, der von der chemischen Energie eines Akkumulators gespeist wird. Mit einem solchen Gleichstromgenerator kann dann das magnetische Feld anderer Maschinen, z. B. von Synchronmaschinen erregt werden. In einem Leiter, der in einem auf diese Art hergestellten Magnetfeld bewegt wird, tritt ein der Geschwindigkeit der Bewegung bzw. der räumlichen Verteilung des Magnetfeldes entsprechender gleichförmiger oder beschleunigter Strom auf.

Dieser Strom wird entweder direkt zum Verbraucher geführt, oder er induziert in einem benachbarten Leiter, z. B. in der Sekundärwicklung eines Transformators oder in einem weit entfernten Leiter, z. B. in der Antenne eines Rundfunkempfängers, einen Strom.

Diese Übertragung elektrischer Energie erfordert im allgemeinen recht komplizierte Übertragungselemente. Sie kann der industriellen und privaten Energieversorgung ebenso wie der Nachrichtenübermittlung dienen. Im ersten Fall ist der Wirkungsgrad der Übertragung von ausschlaggebender Bedeutung, im zweiten Fall, in dem die elektrische Energie nur der Träger der zu übertragenden Nachricht ist, kommt es weniger auf den Wirkungsgrad als auf die Qualität der Nachrichtenübermittlung an.

Bei den üblichen Spannungen sind die Kräfte zwischen statischen Ladungen sehr gering. Zwischen bewegten Ladungen treten aber schon bei kleinen Strömen beträchtliche Kräfte auf. Da die in der Praxis verwendeten Maschinen fast alle auf dem elektromagnetischen Prinzip beruhen, können die elektrostatischen Kraftwirkungen außer bei sehr hohen Spannungen unberücksichtigt bleiben.

Die Elektrostatik spielt dabei nur eine Nebenrolle als Isolationsproblem. Trotzdem sind gerade diese Fragen von außerordentlicher Bedeutung.

Bei der Übertragung elektrischer Energie werden im wesentlichen durch bewegte Ladungen andere Ladungen in mehr oder weniger entfernten Stromkreisen in Bewegung gesetzt und deren Energie ausgenutzt.

Dabei können zwei Vorgänge unterschieden werden: Zuerst wird ein magnetisches Feld erzeugt, und dann werden mit Hilfe des Magnetfeldes die Ladungen durch elektromagnetische Induktion voneinander getrennt, und zwar entweder durch dynamische oder statische Induktion, je nachdem ob der Induktionskreis in einem zeitlich konstanten Feld bewegt wird oder ob die Induktion im ruhenden Leiter durch ein veränderliches Magnetfeld erfolgt.

Die beiden wichtigsten Grundgesetze, die die Erscheinungen der Elektrotechnik beschreiben, sind das Durchflutungsgesetz und das Induktionsgesetz. Das erste beschreibt den Aufbau des magnetischen Feldes, das zweite die Ladungstrennung.

Die Beziehungen

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \Theta, \tag{1.28}$$

$$u = \frac{d\Phi}{dt}, \tag{1.40}$$

$$u = B \cdot s \cdot v \tag{1.32}$$

beschreiben in ihrer einfachen Form diese Gesetze bei langsam veränderlichen Feldern, wie sie in der Starkstromtechnik im allgemeinen vorhanden sind. Die Gleichung (1.32) gilt in dieser Form, wenn entweder die Richtungen von B, s und v senkrecht aufeinanderstehen oder wenn die Bezeichnungen die entsprechenden Komponenten darstellen. Zu beachten ist allerdings, daß die Erscheinungen nur dann richtig dargestellt werden, wenn der erzeugende und der Induktionskreis nahe beieinanderliegen, wie z.B. bei den Spulen eines Transformators. Auf elektromagnetische Wellen können diese Formeln nicht angewandt werden.

Wird in das Durchflutungsgesetz, entsprechend der Annahme von Maxwell, daß auch der Verschiebungsstrom ein magnetisches Feld erzeugt, dieser einbezogen, dann gilt

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \Theta + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{D}\, d\mathfrak{F}. \tag{1.59}$$

Mit dieser Erweiterung erklären die beiden genannten Gesetze zusammen auch die Wellenausbreitung. Im nächsten Abschnitt wird für sie eine Differentialform in einer zur mathematischen Ableitung geeigneten Weise angegeben werden. Nach dem Durchflutungsgesetz erzeugt der Verschiebungsstrom ein magnetisches Wechselfeld auch an den Stellen des Feldes, wo kein Leiterstrom existiert. Dieses magnetische Wechselfeld erregt nach dem Induktionsgesetz auch dort ein elektrisches Feld, wo sich kein Leiter befindet. Die Wellenausbreitung besteht aus einer Kette solcher elektrischer und magnetischer Felder.

Diese Wellenausbreitung im Vakuum oder Dielektrikum ist die allgemeinste Form der elektrischen Energieströmung. Sie ist durch den POYNTINGschen Energievektor darstellbar,

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}. \tag{1.60}$$

Die Energieströmung über Leitungen kann ebenfalls in dieser allgemeinen Form dargestellt werden. Die Leitungen haben nur den Zweck, die Wellen entlang des Leiters zu führen.

Im wesentlichen ist daher jedes Fernleitungs- und Stromkreisproblem eine Frage der Wellenausbreitung und mit den allgemeinen Gleichungen der Elektrodynamik zu lösen.

Bei Vernachlässigung der Nebenwellen muß man bei leitungsgebundener Übertragung mit drei Wellenkomponenten rechnen, und zwar mit der zu übertragenden, die in der Umgebung der Leiter parallel zu deren Achsen verläuft, mit der radialen Wellenkomponente, die zur Deckung der Leitungsverluste dient, und mit der in der Nähe der Leitungsenden abgestrahlten Welle. Die Energie zur Deckung der Verluste der fortschreitenden elektromagnetischen Welle wird von der in den kreisförmig angenommenen Leiter radial eindringenden Wellenkomponente geliefert, die gegen das Innere des Leiters hin rasch abnimmt. Ihr elektrischer Feldstärkevektor verläuft in Richtung der Leiterachse und erzeugt den Strom in der Fernleitung. Nach der üblichen Vorstellung überträgt dieser die Energie. Wir betrachten ihn hier nur als eine Nebenerscheinung, die Verluste verursacht, und interessieren uns für die Energie, die von der sich im Dielektrikum fortpflanzenden Welle geliefert wird.

Der Energievektor $\mathfrak{S}$ steht fast parallel zur Fortpflanzungsrichtung. Zerlegt man ihn in eine axiale und eine dazu senkrechte Komponente, so charakterisiert die axiale die übertragene und die dazu senkrechte die in den Leiter eindringende Verlustenergie, die wegen des Skineffektes zur Leiterachse hin abnimmt.

Bei einer elektrischen Glühlampe z.B. überwiegt die radiale Energieströmung. Der „Spannungszustand" des in den Glühdraht eindringenden elektromagnetischen Feldes verursacht die thermische Bewegung der Moleküle, die den Draht zum Glühen bringen. Dies ist ein Beispiel für den vollständigen Energieverbrauch. Bei einer idealen Übertragung pflanzt sich dagegen die Energie im umgebenden Medium einer Fernleitung parallel zum Leiter ohne Verluste fort. Das Dielektrikum hat dann nicht die Aufgabe, die Leiter voneinander zu trennen, sondern der Energieströmung eine Bahn zu bieten.

Aus dem isolierenden Medium der Fernleitung strömt die Energie z.B. in die Isolation einer Motorwicklung und von dort in das Eisen. Die senkrechte Komponente des Energiestromes ist die in der Isolation parallel zur Längsrichtung des Leiters induzierte elektrische Feldstärke und die zur Achsenrichtung des Leiters senkrechte magnetische Feldstärke. Um den Leiter herum ist das magnetische Feld verzerrt, so daß auf der einen Seite mehr Energie aus der Isolation in das Eisen strömt als auf der anderen. Das hat eine Drehbewegung des Rotors zur Folge.

Die Bewegung eines Motors entsteht also danach nicht als Folgeerscheinung der im Leiter induzierten Spannung. Diese hält nur das Gleichgewicht mit der Netzspannung aufrecht und regelt dadurch die Größe des Stromes. Die Ursache der Bewegung ist vielmehr die in der Isolation induzierte Spannung. Mit einem ähnlichen Gedankengang kann auch die Energieströmung im Transformator beschrieben werden.

Geht man so vor, dann dürfte man, strenggenommen, nur in einem Gleichstromkreis mit Strom, Spannung und Widerstand rechnen. Auf jeder anderen Leitung entsteht nämlich wegen der endlichen Geschwindigkeit der Wellenausbreitung ein bestimmter Zustand in jedem Punkt des Stromkreises zu einem anderen Zeitpunkt.

Solange aber die Abmessungen der Stromkreise bei niedrigen Frequenzen im Vergleich zur Wellenlänge klein sind, kann man praktisch den gleichen Zustand in jedem Punkt des Stromkreises annehmen („quasistationäre Felder"). Statt mit den allgemeinen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes rechnet man dann mit bestimmten Kennwerten des Stromkreises, wie Induktivität, Kapazität und Widerstand. Dazu ersetzt man die veränderlichen Feldgrößen, wie Stromdichte, Feldstärke und Induktion, durch die für einen bestimmten Stromkreisabschnitt resultierenden Integralgrößen, wie Strom, magnetischer Fluß und Spannung. Fließt z.B. in einer Leiterschleife ein hochfrequenter Strom, dann ist die Feldstärke in einem bestimmten Augenblick an jeder Stelle der Schleife verschieden. Der Leiter stellt hierbei die Grenzfläche der elektromagnetischen Wellen dar. Er muß eine der elektrischen Feldstärke entsprechende Ladungsverteilung und eine der Verteilung der magnetischen Feldstärke entsprechende Stromstärke besitzen. Sind dagegen die Abmessungen der Leiterschleife klein gegen die Wellenlänge, so ist die der Wellenform entsprechende Änderung längs dieses kurzen Wellenabschnittes gering, und man kann im betrachteten Zeitpunkt überall die gleichen Werte annehmen. Das Magnetfeld der Schleife wird dann dadurch gekennzeichnet, daß man die im Innern der Schleife an den einzelnen Punkten vorhandenen Induktionen, also die Kraftliniendichten, addiert. Die Summe der Kraftlinien ergibt den magnetischen Fluß. Wird durch die nunmehr in jedem Punkt der Schleife im betrachteten Augenblick gleiche Stromstärke dividiert, erhält man die Induktivität. Das ist ein mit den vorher gemachten Einschränkungen konstanter und für das Material und die geometrischen Abmessungen der Schleife charakteristischer Wert.

Eine ähnliche Vorstellung ist anwendbar bei der Beziehung $C = \frac{Q}{U}$ für die stationäre Ladungs- und Spannungsverteilung.

Anordnungen, deren größte Abmessungen im Vergleich zur Wellenlänge vernachlässigt werden können und in denen solche quasistationären Felder auftreten, werden Stromkreise genannt. Sie sind mit Hilfe von Kennwerten berechenbar. Dies gilt z.B. auch für den Hochfrequenzteil eines Rundfunkempfängers bis zu einer bestimmten Frequenz oder für eine Starkstromfernleitung bis zu einem bestimmten Ausmaß.

Der Begriff des Stromkreises enthält die Annahme, daß keine oder nur sehr wenig Energie das System in Form von Strahlung verläßt. Nur unter dieser

Annahme können induktive und kapazitive Blindwiderstände zusammen mit dem Strom und der Spannung die Energieschwingungen des magnetischen und elektrischen Feldes charakterisieren, ebenso wie der Widerstand in einem stationären System den von der zugeführten elektrischen Energie verbrauchten Teil kennzeichnet.

Die Bedingung, daß durch jeden Querschnitt des Stromkreises im betrachteten Zeitpunkt der gleiche Strom fließt, bedeutet, daß der Strom keine veränderlichen Ladungen auf die äußeren Flächen der Leiter bringt. Die Verschiebungsströme außerhalb der Kontinuität des Stromkreises oder zwischen den einzelnen Teilen des Stromkreises können also vernachlässigt werden. Man kann dann in der MAXWELLschen Gleichung den Verschiebungsstrom unberücksichtigt lassen. Das bedeutet aber nicht, daß man innerhalb eines Stromkreises an den Unterbrechungsstellen den Verschiebungsstrom vernachlässigen darf. Er erscheint in der Kapazität des Stromkreises, ist aber die Fortsetzung des Leiterstromes und kann durch diesen ausgedrückt werden.

Eine Anordnung ist also dann ein Stromkreis, wenn der Verschiebungsstrom zwischen den einzelnen Teilen bzw. zwischen den einzelnen Teilen und der Umgebung gegen den Verschiebungsstrom innerhalb des Stromkreises, der den Leiterstrom fortsetzt, vernachlässigt werden kann. Ein solches System strahlt keine Energie ab.

Mit Hilfe dieser Vorstellung, die unmittelbar auf dem Kraftlinienbild beruht, kann das gesamte System des Elektromagnetismus aufgebaut werden. Dabei genügen zur Festlegung der Grundbegriffe einfache Experimente:

1. Die elektrische Ladung ist durch ihre elektrolytische Wirkung meßbar. Ihre praktische Einheit ist das Coulomb (C). Das ist die Ladung, die in einem Silber-Voltameter 0,001118 g Silber ausscheidet.
2. Die Stromstärke ist die in der Zeiteinheit fließende Ladung. Ihre Einheit ist das Ampere (A). Diese Stromstärke ist dann vorhanden, wenn durch den gegebenen Querschnitt 1 C/s fließt.
3. Die Spannung ist die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten. Sie bewirkt den Ladungstransport von dem einen zu dem anderen betrachteten Punkt. Die Spannung ist durch die Arbeit meßbar, die zum Transport der positiven Einheitsladung geleistet werden muß. Diese Arbeit kann z.B. aus der Wärmewirkung des Stromes bestimmt werden. Die Einheit ist das Volt (V). Diese Spannung herrscht zwischen zwei Punkten, wenn zur Übertragung einer Ladung von 1 Coulomb eine Arbeit von 1 Joule erforderlich ist. Eine Spannung von 1 Volt erzeugt bei einem Strom von 1 Ampere in der Sekunde eine Wärmemenge, die 1 Joule entspricht.

   Mit einem verlust- und kapazitätsfreien Spannungsmesser kann die Feldstärke gemessen werden und wegen der Erscheinung der elektrostatischen Influenz auch die dielektrische Verschiebungsdichte, wenn die Ladung der an den betrachteten Stellen getrennten und ausgehobelten Metallplättchen mit einem ballistischen Galvanometer gemessen wird. Die zum größten Stromintegral gehörende Lage zeigt die Richtung, der durch die Oberfläche dividierte Wert die Größe der Verschiebungsdichte an.

4. Der Widerstand wird durch das OHMsche Gesetz eingeführt. Seine Einheit ist das Ohm (Ω). Das ist der Widerstand eines Leiters, in dem zur Erzeugung einer Stromstärke von 1 Ampere eine Spannung von 1 Volt benötigt wird.

   Die Einheit des Widerstandes kann weiterhin definiert werden

   a) durch einen Quecksilberfaden gegebener Dimension und Temperatur. Die Spannung wird dann durch das OHMsche Gesetz eingeführt.

   b) aus der durch die elektromotorische Kraft eines Kadmium-Normalelementes festgelegten Spannungseinheit.

5. Die Kapazität ist der Quotient aus Ladung und Spannung. Sie ergibt sich aus deren Messung. Ihre Einheit ist das Farad (F). Das ist die Kapazität eines Kondensators, der durch die Ladung von 1 Coulomb auf die Spannung 1 Volt aufgeladen ist.

6. Die magnetischen Feldgrößen werden durch das elektromagnetische Induktionsgesetz bestimmt. In der Umgebung eines elektrischen Stromes existiert ein magnetisches Feld, dessen zeitliche Veränderung eine elektromotorische Kraft erzeugt. Größe und Richtung der Induktion kann an jeder Stelle des Feldes mit einer Spule aus einer Windung mit Einheitsquerschnitt gemessen werden. Man muß dabei die Lage der Spule so lange verändern, bis bei Unterbrechung des Primärstromes ein maximaler Spannungsstoß erreicht wird. Die Normale der Spulenebene ergibt dann die Richtung, und der induzierte Spannungsstoß gibt die Größe der Induktion an.

   Der Spannungsstoß wird mit einem ballistischen Galvanometer oder mit einem Elektrometer mit langer Schwingungsdauer gemessen.

   Die Einheit der Induktion ist 1 Vs/cm². Das ist die gleichmäßige Induktion über den Querschnitt von 1 cm² einer Spule mit einer Windung, wenn bei gleichmäßigem Verschwinden des Feldes in einer Sekunde eine Spannung von 1 Volt induziert wird. Die CGS-Einheit, das Gauß, ist 10^8 mal kleiner: 1 Gauß $= 10^{-8}$ Vs/cm². Die Verbindungslinien der jeweiligen Normalen, die zu den größten induzierten Spannungen in der Einheitsspule gehören, bilden geschlossene Kurven, die z.B. mit Eisenfeilspänen sichtbar gemacht werden können. Dieses sind die sogenannten Kraft- oder Induktionslinien.

   Die Feldstärke kann mit einem magnetischen Spannungsmesser gemessen werden.

7. Das Integral der Normalkomponenten der Induktion über eine bestimmte Fläche ist der „magnetische Fluß“ oder der Induktionsfluß durch diese Fläche.

   Es ist nach (1.35)

$$\Phi = \int \mathfrak{B}\, d\mathfrak{F}.$$

Der Fluß ist dem erzeugenden Strom proportional (vgl. (1.38)):

$$\Phi_s = w\Phi = Li.$$

Dabei ist L bei einem Material mit konstanter Permeabilität eine geometrische Konstante.

Die Einheit des magnetischen Flusses ist 1 Vs. Das ist der Induktionsfluß durch die Fläche von 1 cm², wenn die Normalkomponente der Induktion in jedem Punkt der Fläche 1 Vs/cm² beträgt. Die CGS-Einheit ist das Maxwell. 1 Maxwell = 10^{-8} Vs.

Die Einheit der Induktivität ist 1 Henry (H). Das ist die Induktivität einer Spule, in der ein Strom von 1 Ampere einen magnetischen Fluß von 1 Vs erzeugt. 1 Henry = 1 Vs/A = 1 Ω s.

8. Durch Messungen kann man nachweisen, daß in einem Solenoid die Induktion den Stromwindungen pro Längeneinheit proportional ist:

$$B = \mu \frac{w i}{s} = \mu H.$$

Dabei ist der Induktionsfaktor in Luft $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vs}}{\text{Acm}} = 1{,}256 \frac{\text{Gauß} \cdot \text{cm}}{\text{A}}$. μ ist in ferromagnetischen Stoffen eine Funktion der Feldstärke H.

9. Der Ausdruck

$$\int_s \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s}$$

wird magnetische Spannung genannt. Diese kann mit einer gleichmäßig gewickelten langen flachen Spule gleichförmigen Querschnittes und einem ballistischen Galvanometer gemessen werden. Bei den Messungen ergibt sich ein Spannungswert, der,

a) wenn der geschlossene Kreis keinen Strom, also keine Durchflutung umschließt, gleich Null ist,

b) wenn der geschlossene Kreis Stromfäden umschließt, gleich der algebraischen Summe der Ströme ist.

Aus dem Vergleich beider Messungen folgt das Durchflutungsgesetz:

$$\text{a)} \oint_{\Theta=0} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = 0, \qquad \text{b)} \oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \sum_k i_k = \Theta.$$

Beide Formulierungen können bei der Berechnung magnetischer Felder verwendet werden.

1.4 DIE MAXWELLSCHEN GLEICHUNGEN

Das Durchflutungsgesetz (1.59) und das Induktionsgesetz (1.44) sind mit der 1. und 2. MAXWELLschen Gleichung identisch.

Wird das Durchflutungsgesetz für den Gesamtstrom eines einzelnen Leiters aufgeschrieben, der Integrationsweg auf der Leiteroberfläche zusammengezogen (Abb. 3) und der STOKESsche Satz angewendet, so gilt

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \int \text{rot}\, \mathfrak{H}\, d\mathfrak{F} = \int \mathfrak{G}\, d\mathfrak{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{D}\, d\mathfrak{F}.$$

Unter der Annahme, daß diese Beziehung auch für jedes kleine Flächenelement dF gilt, folgt

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}. \tag{1.61}$$

Dies ist die erste MAXWELLsche Gleichung.

Die zweite MAXWELLsche Gleichung folgt aus dem Induktionsgesetz auch wieder mit Hilfe des STOKESschen Satzes. Man muß dabei aus der Gleichheit der Integrale auf die Gleichheit der Integranden schließen und muß also auch dieses Gesetz für jedes Flächenelement dF als gültig annehmen. Es ist dann

$$\oint \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s} = \int \operatorname{rot}\mathfrak{E}\, d\mathfrak{F} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\int \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} d\mathfrak{F}.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{1.62}$$

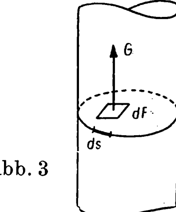


Abb. 3

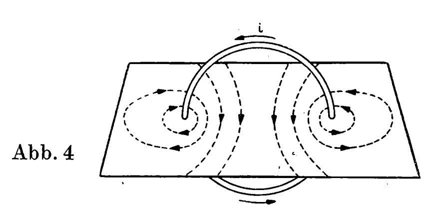


Abb. 4

Die Gleichungen (1.61) und (1.62) gelten nur für ruhende Medien. Bei bewegten Körpern kommen noch weitere Glieder hinzu.

Wird bei kleinen Frequenzen der Verschiebungsstrom in (1.61) vernachlässigt, dann wird durch diese Gleichung zum Ausdruck gebracht, daß die elektrischen Ströme die Wirbel des magnetischen Feldes sind (Abb. 4).

Existiert im Feld kein Leiterstrom, dann besagen die 1. und 2. MAXWELLsche Gleichung, daß ein elektrisches Wechselfeld ein Magnetfeld erzeugt und daß ein veränderliches Magnetfeld ein elektrisches Feld aufbaut. Das ist letzten Endes die Ursache für die elektromagnetische Wellenausbreitung.

Erforderlich sind jetzt noch Aussagen über die Natur der elektrischen und magnetischen Kraftlinien: Die dielektrischen Verschiebungslinien haben ihre Quellen an den Ladungen, $\oint \mathfrak{D}\, d\mathfrak{F} = Q$ bzw. $\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho$, und die magnetischen Kraftlinien sind geschlossen und besitzen keine Quellen und Senken, $\oint \mathfrak{B}\, d\mathfrak{F} = 0$ bzw. $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$.

Wir haben damit die folgenden Fundamentalgleichungen:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}, \tag{1.61}$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}, \tag{1.62}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho, \tag{1.63}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0 \tag{1.64}$$

als endgültige Form der MAXWELLschen Theorie für ruhende Körper. Dazu kommen als Ergänzung noch Gleichungen, die die Vektoren $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{G}$ mit den Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ verknüpfen:

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \tag{1.65}$$

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \tag{1.66}$$

$$\mathfrak{G} = \sigma \mathfrak{E}. \tag{1.67}$$

σ ist die elektrische Leitfähigkeit.

Die MAXWELLschen Gleichungen sind im wesentlichen partielle Differentialgleichungen. In der Praxis wird die Integrallösung der Gleichungen benötigt. So braucht man z.B. bei der Behandlung des elektrischen Stromkreises an Stelle der Beziehung zwischen Stromdichte- und Feldvektoren eine Beziehung zwischen dem Gesamtstrom und der dem Kreis aufgedrückten Spannung. In einfachen Fällen ist die unmittelbare Lösung, die allerdings den Grenzbedingungen angepaßt werden muß, möglich. Bei der Berechnung von elektrischen Netzen sind jedoch die Grenzbedingungen praktisch unlösbar verwickelt. Daher ist die Einführung von Hilfsfunktionen, d.h. von Potentialfunktionen, notwendig. Mit ihrer Hilfe können dann mittelbare Lösungen gefunden werden.

Aus der durch die Ladungsverteilung bestimmten Skalarpotentialfunktion kann die elektrische Feldstärke und aus der durch die Stromverteilung bestimmten Vektorpotentialfunktion der Vektor der magnetischen Induktion durch Differentiation in Operatorenschreibweise ermittelt werden:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} V \tag{1.57a}$$

und

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}. \tag{1.47}$$

Dem Skalarpotential kommt eine unmittelbare physikalische Bedeutung zu. Es hat die gleiche Größe wie die Arbeit, die zur Übertragung der positiven Einheitsladung nach einem bestimmten Punkt geleistet werden muß. Aus dem Potential kann nur die statische Feldstärke berechnet werden. Die Feldstärke induzierter Felder muß aus der zweiten MAXWELLschen Gleichung bestimmt werden. Es wird später noch gezeigt, daß die Bestimmung aus dem Vektorpotential einfacher ist.

Das Vektorpotential besitzt in dieser Fassung eher eine mathematische Bedeutung als einen unmittelbaren physikalischen Sinn. Es ist dem elektrischen Potential nur insofern ähnlich, als das Feld daraus in gleicher Weise durch Differentiation, nämlich mit dem Differentialoperator ∇, abgeleitet werden kann. In 1.24 wurde seine physikalische Bedeutung behandelt. Dabei wurde nachgewiesen, daß eine physikalische Übereinstimmung mit V nicht vorhanden ist. Bei der jetzigen Betrachtung erscheint es jedoch als ein formal analoger Begriff. Die Gleichung (1.47) kennzeichnet das Vektorpotential noch nicht vollständig, da sie noch eine beliebige Funktion enthalten kann, deren Rotation Null ist. Außerdem muß noch die Divergenz festgelegt werden. Diese kann im allgemeinen beliebig sein. Bei statischen und quasistationären Feldern wird zweckmäßigerweise gewählt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0. \tag{1.68}$$

Es soll nunmehr untersucht werden, wie man aus den Ladungen bzw. aus den Stromdichten die elektrischen bzw. die magnetischen Potentiale bestimmen und diese Potentialfunktionen anwenden kann.

Dabei werden Nieder- und Hochfrequenzfelder getrennt behandelt.

1. Bei niedrigen Frequenzen kann der Verschiebungsstrom in der ersten MAXWELLschen Gleichung unberücksichtigt bleiben. Bei konstanten Feldern ist es zweckmäßig, div $\mathfrak{A} = 0$ anzunehmen. Setzt man (1.47) in die erste MAXWELLsche Gleichung ein, so erhält man die POISSONsche Vektorgleichung

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = -\mu \mathfrak{G}, \tag{1.69}$$

und mit (1.57a) und (1.63) folgt für das elektrische Potential die gewöhnliche POISSONsche Gleichung

$$\nabla^2 V = -\frac{\varrho}{\varepsilon}. \tag{1.70}$$

Die Auflösung dieser Differentialgleichungen ergibt für die Potentiale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mu \mathfrak{G}}{r} \, d r \tag{1.71}$$

und

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varrho \, d r}{\varepsilon r}. \tag{1.72}$$

Mit Hilfe der Potentialfunktionen ist es möglich, z.B. die Feldstärke in einem beliebigen Punkt eines Leiters und hieraus die resultierende Spannung zwischen zwei Punkten des Leiters zu finden.

Setzt man hierzu $\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ in die zweite MAXWELLsche Gleichung ein und vertauscht die Reihenfolge der Differentialoperationen, so erhält man

$$\operatorname{rot}\left(\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{1.73}$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt die statische Feldstärke dar. Man kann das hierzu gehörende Feld aus dem genannten Skalarpotential berechnen, denn es ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}_{st} = \operatorname{div} \mathfrak{E} = -\frac{\varrho}{\varepsilon},$$

d.h.

$$\mathfrak{E}_{st} = \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} V.$$

Die letzte Gleichung liefert das von Wechselströmen, also von magnetischen Wechselfeldern und von den Ladungen des Systems herrührende elektrische Feld

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V. \tag{1.74}$$

Hierzu kommt noch die Resultierende der dem Kreis aufgezwungenen eingeprägten Feldstärken $\mathfrak{E}_e$. Diese rühren von anderen, in der Nähe befindlichen Ladungen oder Strömen her. Sie können auch chemischen, thermischen oder Kontakt-Ursprunges sein. Die resultierende Gesamtfeldstärke des Leiters wird dann

$$\mathfrak{E}_{\text{ges}} = \frac{\mathfrak{G}}{\sigma} = \mathfrak{E}_e - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V. \tag{1.75}$$

Die Spannung an der gegebenen Länge eines räumlich ausgedehnten Leiters kann definiert werden als gleich dem Mittelwert der Arbeit, die notwendig ist zur Fortbewegung sämtlicher den Strom bildenden Ladungen gegen die Feldrichtung.

Wird aus der resultierenden Feldstärke die Spannung längs eines geschlossenen Stromkreises ausgerechnet, so bedeuten die drei Teilausdrücke die aufgezwungene, die induzierte und die durch die Lage der Ladungen gegebene statische Spannung. Vertauscht man in der Gleichung (1.75) die aufgezwungene Spannung mit dem Ohmschen Spannungsabfall, dann erhält man die Grundgleichung des Stromkreises. Danach ist die aufgezwungene Spannung gleich der Summe der Ohmschen, induktiven und kapazitiven Spannungsabfälle.

2. Bei hohen Frequenzen gilt für die resultierende Feldstärke gleichfalls (1.75). Jedoch müssen die Potentiale anders berechnet werden. Die Divergenz des Vektorpotentials wird jetzt durch die Beziehung festgelegt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{1.76}$$

Dadurch erhält man aus den vollständigen Maxwellschen Gleichungen die inhomogenen Wellengleichungen

$$\nabla^2 \mathfrak{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathfrak{G}, \tag{1.77}$$

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon}. \tag{1.78}$$

Ihre Lösungen sind die Potentiale

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mu \mathfrak{G}(t - r/c)}{r} dv, \tag{1.79}$$

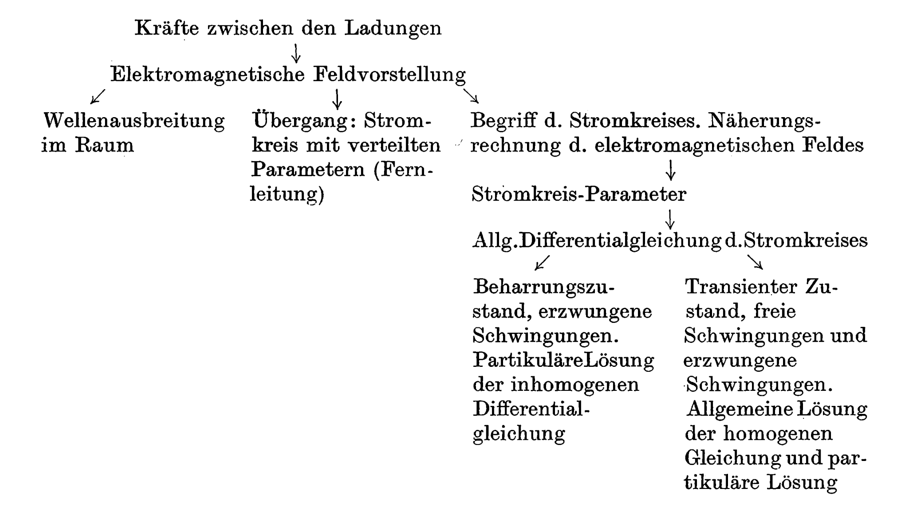
$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varrho(t - r/c)}{\varepsilon r} dv. \tag{1.80}$$

An den Raumpunkten mit $\varrho = 0$ und $\mathfrak{G} = 0$ sind (1.77) und (1.78) die partiellen Differentialgleichungen der Wellenbewegung.

Setzt man die Potentiale in die Formel für die elektromotorische Kraft ein, dann ist die Vereinfachung dieser Integralgleichungen bei hohen Fre-

quenzen nicht mehr dadurch möglich, daß die Ströme mit Hilfe bestimmter Parameter aus der aufgezwungenen Spannung berechnet werden können. Theoretisch ergeben die Integralgleichungen den resultierenden Spannungsabfall. Seine Berechnung ist in der Praxis bei bekannten Strömen zu umständlich. Man berechnet deshalb zunächst die Werte bei niederen Frequenzen und berücksichtigt dann den durch Strahlung bedingten Anstieg des Effektivwiderstandes.

Ausgehend von den auf die Ladungen wirkenden Kräften haben wir mit Hilfe des Begriffes des elektromagnetischen Feldes einen Weg gezeigt, die elektromagnetischen Wellen und den elektrischen Stromkreis zu behandeln. Die sich daraus ergebenden Folgerungen bedeuten vom physikalischen Standpunkt aus nichts grundsätzlich Neues. Ein großer Teil der Elektrotechnik ist nichts anderes als der volle Ausbau der Einzelfragen des elektrischen Stromkreises. Baut man die Elektrotechnik nach einem solchen Schema auf, dann gilt etwa folgende Tabelle:



Hierin sind die Grundelemente der Elektrotechnik enthalten, wozu im Prinzip später nichts mehr hinzugefügt wird. Es werden lediglich die vom technischen Standpunkt aus wichtigen Einzelfragen erörtert. Zur Lösung komplizierter Aufgaben ist allerdings die Anwendung höherer mathematischer Methoden notwendig. Das Mehrphasensystem bedeutet z. B. nur in bestimmter Weise gebundene Phasenverhältnisse. Das Arbeitsdiagramm ist nur eine Zeichnung der Betriebsverhältnisse, die in einem Stromkreis vorhanden sind. Die Berechnung mehrwelliger Ströme ergibt eine bei linearen Netzen zulässige Superposition. Das Netz z. B. stellt nichts anderes dar als einen komplizierten Stromkreis und ist nur wegen der Mehrarbeit der Lösung „mehr" als ein einfacher Kreis in Reihenschaltung.

2 MAGNETISCHE FELDER UND KREISE

2.1 EINLEITUNG

Der Verfasser hatte bei den folgenden Betrachtungen die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten. Entweder beschränkt er sich ausschließlich auf die Behandlung der magnetischen Kreise und schließt sich damit der üblichen Praxis bei den Übungen und Aufgaben der Technischen Hochschulen an, oder er geht auf die Probleme des magnetischen Feldes ein. Dazu ist allerdings die Anwendung komplizierter Berechnungs- und Konstruktionsmethoden sowie der Vektoranalysis erforderlich.

Es wurde die zweite Möglichkeit gewählt, wofür folgende Gründe ausschlaggebend waren: Die Abbildung des Magnetfeldes besitzt große didaktische Bedeutung. Das wurde in den letzten Jahren immer mehr erkannt. Die Begriffe des magnetischen und des elektrischen Kreises bleiben in der Vorstellung der Studenten ein Formalismus ohne Grundlage, solange die physikalischen Grundlagen nicht erfaßt worden sind. Es ist daher notwendig, die Begriffe auf der Feldvorstellung aufzubauen, die in der modernen Elektrotechnik von grundlegender Bedeutung ist. Die Wichtigkeit der erläuterten Methoden für die Abbildung des Flußbildes magnetischer Felder wird dadurch erhöht, daß auch in anderen Zweigen der technischen Wissenschaften hiervon Gebrauch gemacht wird.

Es gibt allerdings unter den angeführten Methoden und Beispielen auch solche, die die üblichen Anforderungen der Praxis überschreiten.

Aus mehreren Gründen werden trotzdem diese Methoden behandelt. Der erste und wichtigste ist das Bestreben, eine zumindest in Umriß und prinzipiellem Charakter vollständige Übersicht zu geben. Auf Grund der Erfahrungen mit Übungsaufgaben an Technischen Hochschulen ist es zweckmäßig, die theoretischen und praktischen Möglichkeiten zu erörtern. Man kann daher die in der üblichen Praxis weniger angewandten Verfahren nicht vermeiden. Oft verhelfen nämlich gerade diese zu einer Klärung der Prinzipien und Zusammenhänge. Die Schwierigkeiten der Aufgaben und der Berechnungsmethoden und dementsprechend der Umfang des notwendigen Textes entsprechen nicht unbedingt der praktischen Bedeutung. Nach Ansicht des Verfassers ist keine der angeführten Methoden für die Praxis völlig unnütz. Vom theoretischen Standpunkt aus liefert sogar jede einen Beitrag zur Klärung des Magnetbildes. Es ist kein Fehler, wenn eine Aufgabensammlung umfangreich ist und wenn die Aufgaben schwer zu lösen sind. Damit ist nur der Entwick-

lung des Lesers gedient, indem er zur selbständigen wissenschaftlichen Arbeit angeregt wird.

Es wird nur auf die Berechnung und Konstruktion magnetischer Felder eingegangen. Bewußt sind die im magnetischen Feld auftretenden Kraft- und Induktionswirkungen nicht angeführt. Ebenso wird auf die Berechnung der im Feld gespeicherten Energie und auf die Behandlung der Probleme magnetischer Wechselstromkreise verzichtet.

Aus technischen Gründen wurden nur wenige Aufgaben aufgenommen, die eine graphische Lösung erfordern. Mit Hilfe der in den ausgearbeiteten Beispielen angeführten Theorien können solche Aufgaben selbständig gelöst werden. Dies ist allerdings oft mit erheblicher Mühe verbunden.

Die Beispiele sind im allgemeinen ziemlich schwierig. Darauf wird besonders hingewiesen, um den Leser nicht zu entmutigen. Der Anfänger wird daher zweckmäßigerweise erst die Lösung der einfacheren Aufgaben versuchen.

2.2 ÜBERSICHT ÜBER DIE BERECHNUNGSMETHODEN

2.21 Die Erzeugung des Magnetfeldes

Die nachstehenden Berechnungen und Konstruktionen dienen zur Bestimmung des Kraftlinienbildes eines Magnetfeldes in einem gewissen Feldteil.

In einer gegebenen Anordnung muß die Feldlinienverteilung des magnetischen Flusses bekannt sein, weil damit die voraussichtlichen Kraft- und Induktionswirkungen in den einzelnen Teilen oder Punkten dieses Magnetfeldes berechnet werden können. Die Aufgabe kann in zwei Richtungen gestellt werden. Es kann gefragt werden, welche Kraft- bzw. Induktionswirkungen eine Durchflutung von gegebener Größe und bekannter Verteilung hervorruft. In diesem Fall werden aus den Strömen die in den einzelnen Punkten hervorgerufenen Induktionen bestimmt. Die zweite Fragestellung fordert die Feststellung der Größe und der Anordnung der Ströme, die bestimmte Flußdichten hervorrufen. Dabei sind die für gewisse gewünschte Wirkungen benötigten Flußdichten bekannt. Den Berechnungen liegt in beiden Fällen die Feld- und Kraftlinienvorstellung zugrunde.

Stellt man sich längs der Kraftlinien wirksame Kräfte vor, so bildet das Strömen der Kraftlinien anschauliche hydrodynamische Analogien. Außerdem wird durch die Auflösung der Erscheinung in zwei Teile die Berechnung einfacher und übersichtlicher. In ferromagnetischen Materialien ist eine andere Lösung nicht möglich. Das Feld und die in ihm auftretenden Wirkungen können getrennt werden. Befaßt man sich mit dem Aufbau des Kraftlinienbildes, braucht man auf die in diesem Feld später auftretenden Wirkungen, z. B. die Induktionswirkungen, nicht einzugehen. Jedoch müssen die Rückwirkungen berücksichtigt werden.

Untersucht man dagegen die in einem Magnetfeld ablaufenden Erscheinungen, z. B. die auf einen Strom ausgeübten Kräfte, braucht die Art des Kraftlinienaufbaus nicht untersucht zu werden.

Wenn man die Änderung der Permeabilität ferromagnetischer Stoffe und die Erscheinung permanenter Magnete als Wirkung von Molekularströmen ansieht, kann man mit allgemeiner Gültigkeit feststellen, daß das magnetische Feld immer durch die Wirkung eines elektrischen Stromes entsteht. Dabei muß allerdings bei schnellen Änderungen der Verschiebungsstrom berücksichtigt werden.

2.211 Das Durchflutungsgesetz

In seiner allgemeinen, für langsame Änderungen gültigen Form lautet das Durchflutungsgesetz

$$\oint \mathfrak{H} \, d\mathfrak{s} = \Theta. \tag{1.28}$$

Dementsprechend ist das Linienintegral der magnetischen Feldstärke entlang einer geschlossenen Kurve gleich der algebraischen Summe der durch die Kurve eingeschlossenen Stromlinien, also gleich der Durchflutung.

Die Berechnung oder die Konstruktion des magnetischen Kraftlinienbildes erfolgt mit Hilfe dieses Gesetzes bzw. mit Hilfe der aus ihm gewonnenen Beziehungen.

Erfahrungsgemäß gilt das Durchflutungsgesetz auch für zeitlich veränderliche Felder, unter der Voraussetzung, daß die Dimensionen der gegebenen Anordnung klein sind gegenüber der Wellenlänge der elektromagnetischen Wellen. Die folgenden Ausführungen gelten daher sinngemäß auch für langsam veränderliche Wechselströme.

Dabei ist zu berücksichtigen, daß der Wechselfluß im Eisenkern und in naheliegenden Leitern Nebenerscheinungen wie Hysteresis, Wirbelströme und Nachwirkungen verursacht. Diese Wirkungen müssen gesondert untersucht werden. Weiterhin muß beachtet werden, daß bei kleinen Änderungen, die sich einer konstanten Magnetisierung überlagern, die magnetischen Vorgänge längs kleiner Hysteresisschleifen (Abb. 144) verlaufen.

2.212 Das Bild des Magnetfeldes

(1.) Skalar- und Vektorgrößen

Skalare Größen, wie Potential und Temperatur, werden durch ihren Betrag vollkommen bestimmt. Zu ihrer Festlegung benötigt man die Definition der Einheit und eine Zahl, die, multipliziert mit der Einheit, die betrachtete Größe ergibt.

Vektoren[(6)], wie magnetische Feldstärke und Induktion, werden durch Betrag und Richtung im Raum bzw. in der Ebene bestimmt. Ihre Festlegung erfordert die Angabe der Einheit, des Zahlenwertes und der Richtung.

Die Vektoren sind die einfachsten nichtskalaren physikalischen Größen[(7)]. Ihre graphische Darstellung kann durch eine gerichtete Strecke erfolgen. Bei ihrer Anwendung sind immer die physikalischen Verhältnisse zu berücksichtigen. So ist z. B. bei einer Kraft stets ihre Wirkungslinie in Betracht zu ziehen.

(2.) Skalar- und Vektorfelder

Der Teil eines Raumes oder einer Ebene, in dem eine physikalische Größe, gegebenenfalls mit Ausnahme einzelner Punkte, gesetzmäßig verteilt ist, wird nach seiner ungerichteten oder gerichteten Natur ein Skalar- bzw. Vektorfeld genannt.

Ein Skalarfeld kann durch Kurven veranschaulicht werden, die Punkte gleicher Größe verbinden. Sind für je zwei benachbarte Kurven gleiche Wertunterschiede festgelegt, so wird dadurch das Feld auch quantitativ charakterisiert.

Das Vektorfeld kann durch die Linien gekennzeichnet werden, die sich ergeben, wenn in jedem Punkt auf sehr kleinem Abschnitt die Richtung des Vektors verfolgt wird. Die Tangenten der Linien geben dann in jedem Punkt die Richtung des Vektors an. Ihre Dichte kann so gewählt werden, daß die Zahl der Linien, die den kleinen Einheitsquerschnitt senkrecht durchsetzen, jeweils an der betrachteten Stelle dem Zahlenwert des Vektors entspricht.

(3.) Klassifikation der Vektorfelder[8]

Die Vektorfelder können entsprechend ihrer Struktur in vier Gruppen unterteilt werden.

a) Das Feld ist geschichtet, also laminar und solenoidal. Es ist also wirbel- und quellenfrei: $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$ und $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$. Nach der ersten Bedingung kann das Feld aus einem Skalarfeld abgeleitet werden. Dies ergibt zusammen mit der Quellenfreiheit $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ die LAPLACEsche Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = 0. \tag{2.1}$$

φ ist das Potential des Vektorfeldes.

b) Das Feld ist nicht solenoidal, aber geschichtet. Es ist zwar wirbel-, aber nicht quellenfrei: $\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$, aber $\operatorname{div} \mathfrak{v} \neq 0$. Die Kraftlinien haben also im Felde verteilte Quellen. Es gilt die POISSONsche Gleichung

$$\nabla^2 \varphi \neq 0. \tag{2.2}$$

c) Das Feld ist zwar solenoidal, aber nicht geschichtet. Es ist quellen-, jedoch nicht wirbelfrei: $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$, aber $\operatorname{rot} \mathfrak{v} \neq 0$. Der Vektor des Feldes kann nicht von einem Skalar abgeleitet werden. Die Rotation eines Vektorfeldes erzeugt ein röhrenförmiges quellenfreies Vektorfeld, da $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$ ist.[9] Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, den Feldvektor von einem Vektor $\mathfrak{A}$ abzuleiten, der mit dem Feldvektor $\mathfrak{v}$ durch die Beziehung $\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ verbunden ist; für diese Beziehung ist die Quellenfreiheit des Feldes Vorbedingung. Vergleicht man $\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ mit $\operatorname{rot} \mathfrak{v} \neq 0$, dann folgt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A}.$$ [10]

Der bisher beliebige Vektor $\mathfrak{A}$ wird jetzt als quellenfrei vorausgesetzt ($\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$). Dann folgt die von Poisson angegebene Beziehung

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{v} = -\nabla^2 \mathfrak{A} \neq 0.$$

Der Unterschied besteht lediglich darin, daß an Stelle des früheren Skalarpotentials ein Vektor auftritt. $\mathfrak{A}$ wird daher Vektorpotential genannt.

d) Das Feld ist weder solenoidal, noch geschichtet. Es hat Quellen und Wirbel: $\operatorname{div} \mathfrak{v} \neq 0$, $\operatorname{rot} \mathfrak{v} \neq 0$. Dadurch ist das allgemeine Vektorfeld gekennzeichnet. Es kann in ein wirbelfreies, geschichtetes und in ein quellenfreies, solenoidales Feld zerlegt werden. Das wirbelfreie Feld kann von einem Skalarpotential abgeleitet werden. Seine Quellen sind gleich den Quellen des resultierenden Feldes. Die quellenfreie Komponente besitzt ein Vektorpotential, und die Wirbel sind die des ursprünglichen Feldes.

Sind $\mathfrak{v}'$ das wirbelfreie und $\mathfrak{v}''$ das quellenfreie Feld, so ist das resultierende Vektorfeld gegeben zu

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}''.$$

Seine Quellen

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \nabla^2 \varphi = \operatorname{div} \mathfrak{v}' \neq 0$$

kein Wirbel
keine Quelle

nur Quelle

nur Wirbel

Wirbel und Quelle

Abb. 5

sind mit den Quellen von $\mathfrak{v}'$ identisch. φ wird durch die POISSONsche Gleichung bestimmt. Die Wirbel des resultierenden Vektorfeldes

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = -\nabla^2 \mathfrak{A} = \operatorname{rot} \mathfrak{v}'' \neq 0$$

sind gleich den Wirbeln von $\mathfrak{v}''$. $\mathfrak{A}$ wird wie im Falle c) durch die POISSONsche Vektorgleichung bestimmt.

Die vier Typen der Vektorfelder sind in der Abb. 5 schematisch dargestellt. Bedeuten die Pfeile der Anschaulichkeit halber die Bewegung von Flüssigkeitsteilchen in dem bezeichneten Punkt, dann zeigt die erste Figur eine fortschreitende Bewegung, die zweite eine Verdünnung, die dritte die Wirbelbewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit und die vierte die gleichzeitige Rotation und Verdünnung einer kompressiblen Flüssigkeit.

Bei den weiteren Betrachtungen, die das Fundament der Berechnungsmethoden des magnetischen Feldes bilden, werden mit Ausnahme des Falles b) alle besprochenen Fälle benötigt.

2.213 Die Struktur des magnetischen Feldes

(4.) Das Magnetfeld im Vakuum

Im Vakuum oder in einem Material konstanter Permeabilität[11] eignet sich nach Abschnitt (3.) c) die POISSONsche Differentialgleichung zur Beschreibung des magnetischen Feldes.

Entsprechend der Differentialform des Durchflutungsgesetzes, das die Erzeugung des Magnetfeldes beschreibt, sind die elektrischen Ströme die Wirbel des magnetischen Feldes:

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \mathfrak{G}.$$

Dabei ist $\mathfrak{G}$ der Vektor der Stromdichte (Abb. 4).

Zusammen mit der Gleichung $\mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0$ bestimmt das Durchflutungsgesetz bei entsprechenden Grenzbedingungen vollständig das magnetische Feld. Die Gleichung bringt die Quellenfreiheit des Magnetfeldes zum Ausdruck. Es gibt nämlich keine wahren magnetischen Ladungen, denn die Induktionslinien und im Felde konstanter Permeabilität auch die Feldstärkelinien sind geschlossene Kurven.

Die Verbindung beider Gleichungen ergibt die POISSONsche Vektorgleichung

$$\nabla^2\mathfrak{A} = -\mathfrak{G}.$$

Dabei ist $\mathfrak{A}$ das durch die Beziehung $\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{H}$ bestimmte Vektorpotential, dessen Quellenfreiheit vorausgesetzt wurde ($\mathrm{div}\,\mathfrak{A} = 0$).

(5.) Das Magnetfeld in den stromfreien Teilen des Feldes

In den stromfreien Teilen des Feldes (außerhalb der Leiter) gilt

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = 0$$

und somit

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = -\nabla^2\mathfrak{A} = 0.$$

Jede Komponente des Vektorpotentials erfüllt die LAPLACE-Gleichung. Das Feld des Vektors $\mathfrak{H}$ ist wirbelfrei. Es kann daher auch aus einem skalaren Potential abgeleitet werden:

$$\mathfrak{H} = -\,\mathrm{grad}\,V = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}.$$

V ist das magnetische Potential. In den stromfreien Teilen des Feldes ist daher der aus dem Gradienten des Skalarpotentials sich ergebende Feldstärkevektor identisch mit der aus der Rotation des Vektorpotentials des Stromes errechneten Feldstärke. Aus diesem Grunde ist die LAPLACEsche Gleichung zur Beschreibung des magnetischen Feldes außerhalb der Stromleiter geeignet:

$$\nabla^2 V = 0.$$

Diese mathematische Tatsache, die physikalisch erzwungen erscheint, ist für die Berechnung und Konstruktion magnetischer Felder in Luft von großer Wichtigkeit.

Das oben definierte Potential des Magnetfeldes ist mehrwertig. Die Bedingung $\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = 0$ ist gleichwertig mit der Forderung $\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = 0$. Das magnetische Feld wird dagegen immer von Strömen aufgebaut. Auf dem Weg, der einen Stromfaden umgibt, gilt $\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = i$. Wird der Stromfaden aus dem Felde ausgeschlossen, so wird es wirbelfrei. Sein Potential ist jedoch nicht eindeutig bestimmt, es ist zyklisch. Das Potential im Punkt A in Abb. 6

soll Null sein. Von A bis B fortschreitend erhöht es sich um $\frac{\Theta}{2} = \frac{i}{2}$, und auf dem unteren Halbkreis nach A zurückkehrend ist das Potential nicht mehr Null, sondern gleich i(12). Bei jedem Umlauf erhöht sich das Potential immer um den gleichen Wert.

Die Mehrwertigkeit des Potentials kann beseitigt werden, wenn man den geschlossenen Stromfaden durch eine vom Strom begrenzte magnetische Schicht endlicher Dicke ersetzt und annimmt, daß die Kraftlinien von der einen Seite der Schicht ausgehen und auf der anderen Seite münden (Abb. 7).

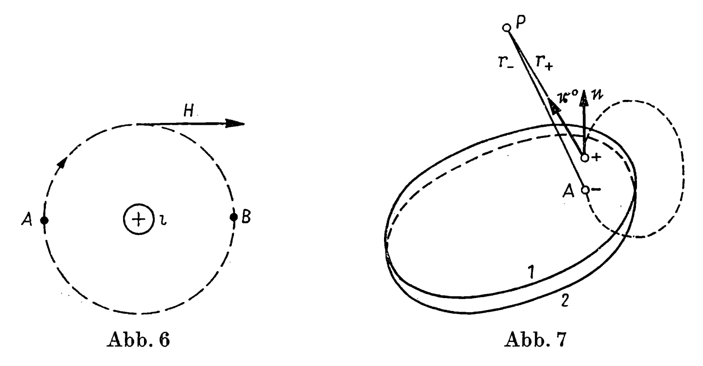


Abb. 6 Abb. 7

Nimmt man auf der Oberfläche eine magnetische Flächendichte $\frac{m}{\mu_0} = \frac{i}{d}$ an, wobei d die Dicke der Schicht bedeutet, so gilt(13)

$$V_1 - V_2 = \frac{m}{\mu_0} d = i = -\int_2^1 \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s},$$

da $i = \frac{m}{\mu_0} d$ den Potentialsprung auf der Doppelfläche bedingt.

Die an den gegenüberliegenden Seiten der Doppelfläche im Punkt A befindlichen, gleichgroßen Magnetpole $m_1\, dF_1$ und $m_2 dF_2$ erzeugen in einem außerhalb liegenden Punkte P unter den Bedingungen $m_1 = m_2 = m$ und $dF_1 = dF_2 = dF$ ein magnetisches Potential(14)

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{m}{\mu_0} dF \frac{1}{r_+} - \frac{m}{\mu_0} dF \frac{1}{r_-}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{m}{\mu_0} dF \cdot d \cdot \operatorname{grad}\frac{1}{r} \cdot \mathfrak{n}.$$

$\mathfrak{n}$ ist der normale Einheitsvektor. Setzt man $\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\mathfrak{r}^0 \frac{1}{r^2}$ ein, wobei $\mathfrak{r}^0$ der P zugewandte Einheitsvektor ist, dann beträgt das von der ganzen Schicht erzeugte Potential in P

$$V = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{m}{\mu_0} \cdot d \cdot \mathfrak{n}\frac{1}{r^2}\mathfrak{r}^0\right) dF = \frac{1}{4\pi}\int \frac{i}{r^2}\cos(\mathfrak{n},\mathfrak{r}^0)\, dF = \frac{1}{4\pi}\int i\, d\omega,$$

$$d\omega = \frac{dF}{r^2}\cos(\mathfrak{n}, \mathfrak{r}^0)$$

bezeichnet den Raumwinkel[15], der von P nach dF zeigt. Somit ist

$$V = \frac{1}{4\pi} i\omega \quad \text{und} \quad \mathfrak{H} = -\operatorname{grad} V = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \omega .$$

Der Wert von V hängt also nur vom Strom und von der die Fläche einschließenden Stromkurve ab. Es kann bewiesen werden, daß dieses Potential gleich dem Vektorpotential ist. Das mit ihm beschriebene azyklische Feld, das mit dem physikalischen Charakter des Feldes nicht übereinstimmt und eine mathematische Abstraktion darstellt, ist ein degenerierter Fall des in den Leitern befindlichen Vektorpotentialfeldes[16]. Damit gilt in den äußeren Punkten

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} = -\operatorname{grad} V$$

Dabei ist $V = i\omega$. Der Ausdruck für $\mathfrak{A}$ wird später angegeben.

(6.) Wirkung ferromagnetischer Stoffe

Bringt man einen ferromagnetischen Stoff in das im Vakuum erzeugte magnetische Feld, so wird dieser magnetisch. Zu dem magnetisierenden Einfluß der äußeren Ströme tragen die sich ordnenden Elementarkreisströme bei. Vom Material gehen magnetische Wirkungen aus und verändern das ursprüngliche Magnetfeld. Die im Vakuum oder in Luft meßbare Induktion

$$\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H}$$

ändert sich und wird entsprechend dem Material $\mu_r$mal größer:

$$\mathfrak{B} = \mu_r \mu_0 \mathfrak{H} = \mu \mathfrak{H} . \tag{1.26}$$

Erfahrungsgemäß gibt es hierbei keine wahren magnetischen Ladungen. Die magnetischen Kraftlinien sind geschlossene Kurven. $\mathfrak{B}$ ist also immer quellenfrei:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 . \tag{1.64}$$

Die meisten Stoffe besitzen eine konstante Permeabilität, die praktisch gleich der des Vakuums bzw. der Luft ist. Sind also im Feld nur solche Stoffe vorhanden, dann gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{div} \mu_0 \mathfrak{H} = \mu_0 \operatorname{div} \mathfrak{H} ,$$

d.h., der Vektor $\mathfrak{H}$ ist ebenfalls quellenfrei, und das unter (4.) Gesagte gilt. Bei bekanntem $\mathfrak{H}$ kann $\mathfrak{B}$ durch Multiplikation mit der Konstanten μ_0 errechnet werden.

Die Permeabilität ferromagnetischer Stoffe weicht von der des Vakuums meist sehr beträchtlich ab. Außerdem ist die Permeabilität eine Funktion der Feldstärke. Darüber hinaus hängt diese von der magnetischen Vorgeschichte der Stoffe ab.

Sind solche Stoffe vorhanden, dann ist $\mathfrak{H}$ nicht mehr quellenfrei und kann aus drei Gründen Quellen besitzen. μ kann sich ändern

1. an der Grenze zweier verschiedener Stoffe, z. B. Eisen und Luft,
2. im Eisen wegen Inhomogenitäten des Materials,
3. wegen der Abhängigkeit der Permeabilität von der Feldstärke in ferromagnetischen Körpern.

Mit einer Änderung der Permeabilität ist wegen der Quellenfreiheit von $\mathfrak{B}$ notwendigerweise auch eine Änderung der Kraftliniendichte des magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ verbunden.

Zuerst soll der stromfreie Teil des Feldes und die Durchdringung der Linien H und B an der Grenze zweier Medien mit den Permeabilitäten μ_1 und μ_2 betrachtet werden.

Da

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

$$\oint \mathfrak{B}\, dF = 0$$

ist, kann sich die Zahl der Induktionslinien auf der Grenzfläche nicht verändern. Die Normalkomponente von $\mathfrak{B}$ ist stetig, d.h.

$$B_{n_1} = B_{n_2}. \tag{2.3}$$

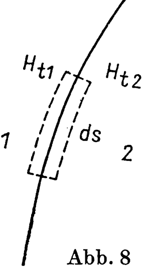


Abb. 8

Nach dem Durchflutungsgesetz ist im stromfreien Feld das Integral über $\mathfrak{H}$ längs einer geschlossenen Kurve gleich Null; $\mathfrak{H}$ ist also wirbelfrei:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0; \quad \oint \mathfrak{H}\, ds = 0.$$

Wendet man das Durchflutungsgesetz auf kurze Strecken an den Grenzflächen an und vernachlässigt die kleineren Seiten (Abb. 8), erhält man

$$H_{t_1} ds - H_{t_2} ds = 0; \qquad H_{t_1} = H_{t_2}. \tag{2.4}$$

Die Tangential-Komponente der Feldstärke ist stetig.

Damit folgt

$$\mu_1 H_{n_1} = \mu_2 H_{n_2},$$

$$\frac{H_{n_1}}{H_{n_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{2.5}$$

Das bedeutet, daß die senkrechte Komponente von $\mathfrak{H}$ springt. Die Anzahl der Feldstärkelinien ändert sich auf der Grenzfläche. Weiterhin folgt

$$\frac{B_{t_1}}{B_{t_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{2.6}$$

Diese Beziehung sagt aus, daß die Tangentialkomponente von $\mathfrak{B}$ einen Sprung aufweist. Die Richtung der Induktionslinien ändert sich also auf der Grenzfläche.

Zusammenfassend ergibt sich aus den Gleichungen

$$H_1 \sin\alpha_1 = H_2 \sin\alpha_2,$$

$$\mu_1 H_1 \cos\alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos\alpha_2$$

und

$$B_1 \cos\alpha_1 = B_2 \cos\alpha_2,$$

$$\mu_2 B_1 \sin\alpha_1 = \mu_1 B_2 \sin\alpha_2$$

das Brechungsgesetz

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{2.7}$$

Dieses ist für die Linien von H und von B gültig. Während jedoch die H-Linien auf der Grenzfläche ihre Anzahl ändern, bleibt diese bei den B-Linien erhalten. Diese zeigen somit die Verhältnisse anschaulicher (Abb. 9).

Bei Aufhebung der Stromfreiheit treten folgende Verhältnisse ein. Im allgemeinen magnetischen Feld besitzt der Vektor der Feldstärke dort Quellen, wo sich die Permeabilität ändert. Andererseits sind auch Wirbel vorhanden, nämlich die elektrischen Ströme. Es gilt

$$\operatorname{div}\mathfrak{H} \neq 0, \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{H} \neq 0.$$

Nach (3.) d) kann ein solches beliebiges Vektorfeld in zwei Felder aufgeteilt werden, nämlich in ein geschichtetes, wirbelfreies und in ein solenoidales, quellenfreies. Man benötigt dann zur Definition von $\mathfrak{H}$ ein Skalar- und ein Vektorpotential.

Bedient man sich des Induktionsfeldes, dann kann der Weg über die beiden Potentiale vermieden werden, da $\mathfrak{B}$ keine Quellen, sondern nur Wirbel besitzt:

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{B} \neq 0.$$

Abb. 9

Demzufolge kann $\mathfrak{B}$ allein aus dem Vektorpotential abgeleitet werden:[5]

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

Die Wirbel von $\mathfrak{B}$ sind teils die Ströme, teils die Wirbel des Magnetisierungsvektors

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B}}{\mu_0} - \mathfrak{H}, \tag{2.8}$$

der eine ähnliche Bedeutung wie die elektrische Polarisation hat, indem er den Einfluß des Materials berücksichtigt. Es gilt daher

$$\operatorname{rot}\mathfrak{B} = \mu_0\,(\operatorname{rot}\mathfrak{H} + \operatorname{rot}\mathfrak{M}).$$

Die Berechnung des Vektorpotentials kann bei bekannter räumlicher Verteilung der Ströme und der Magnetisierung der Körper durch folgenden Ausdruck erfolgen:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{S} + \operatorname{rot}\mathfrak{M}}{r}\cdot dv. \tag{2.9}$$

dv bedeutet das Volumenelement. Diese Formel ist in jedem Punkt des Feldes gültig[17].

In der Praxis wird von dieser Formel allerdings kein Gebrauch gemacht. Im allgemeinen wird vorausgesetzt, daß die Permeabilität des Eisens, zumindest in einem homogenen Feldabschnitt, konstant bleibt.

Ist das gesamte betrachtete Feldstück mit Eisen konstanter Permeabilität ausgefüllt, dann ist das unter (4.) und (5.) Gesagte unmittelbar gültig.

Ist außerdem noch ein anderes Material vorhanden, dann sind an der Grenzfläche des Eisens oder an der Grenzfläche der beiden verschiedenen Eisenmaterialien die bereits erwähnten Brechungsgesetze gültig.

Da die Permeabilität der ferromagnetischen Materialien unterhalb der Sättigung im Verhältnis zu anderen Materialien sehr groß ist, pflegt man sie näherungsweise als unendlich zu betrachten.

Dies bedeutet, daß bei einem fast oder völlig geschlossenen Kreis die Kraftlinien, die außerhalb des Eisens parallel zum Eisenweg verlaufen, vernachlässigt werden können.

Ist in einem solchen Fall der aus ferromagnetischem Material bestehende magnetische Kreis an einer oder mehreren Stellen unterbrochen, so kann bei kleiner Unterbrechung die auf das Eisen entfallende magnetische Spannung gegenüber der auf die Luftstrecke entfallenden nicht vernachlässigt werden. Man kann also die Permeabilität des Eisens in dieser Beziehung nicht als unendlich ansehen. Sind allerdings die Unterbrechungsstellen länger, dann wird oft die auf das Eisen entfallende magnetische Spannung gegenüber der auf die Luftstrecke entfallenden vernachlässigt. In diesem Falle wird die Permeabilität des Eisens als unendlich groß angenommen. Darauf wird in den folgenden Abschnitten noch ausführlich eingegangen.

Bei anderen magnetischen Feldabschnitten, die keinen geschlossenen Kreis bilden, dringen die Kraftlinien nach (2.7) senkrecht in ein Eisen unendlicher Permeabilität ein. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß auf der Grenzfläche keine Stromfäden vorhanden sind. Die Grenzlinien des Eisens stellen eine Äquipotentialfläche dar.

Der Eisenkern trägt die Erregerwicklung, wobei der Einfachheit halber diese oft als ein unendlich dünner Strombelag betrachtet wird. Dann ist allerdings der mit Windungen belegte Teil der Grenzlinie des Eisens keine Äquipotentialfläche mehr. Man kann aber auch mit Spulen gleichmäßiger Stromdichte und endlicher Dicke arbeiten.

Auf Einzelheiten wird bei der Besprechung der Methoden eingegangen werden.

2.22 Methoden der Berechnung und Zeichnung von Magnetfeldern

2.221 Allgemeine Übersicht

Nach der Art der Lösung und der Anwendung unterscheiden wir drei Problemkreise.

(7.) Berechnung geschlossener magnetischer Kreise

Durch Verwendung ferromagnetischer Stoffe kann man den Verlauf der Kraftlinien vorschreiben. Die Flußlinien werden sich nämlich wegen der gro-

ßen Permeabilität des Eisens größtenteils im entsprechend ausgebildeten Kern schließen. Das auf diese Art mit einem magnetisch gut leitenden Material hergestellte Magnetfeld wird magnetischer Kreis genannt (Abb. 10).

Die wenigen nicht im Eisen verlaufenden Kraftlinien werden vernachlässigt oder auf Grund von Erfahrungswerten abgeschätzt. Das Durchflutungsgesetz ist direkt anwendbar, auch dann, wenn kein geschlossener Eisenkern vorhanden ist. Die vollkommene Symmetrie bedingt jedoch eine Form der Kraftlinien, wie sie sich z. B. im Falle eines einzigen langen, geraden Leiters ergibt.

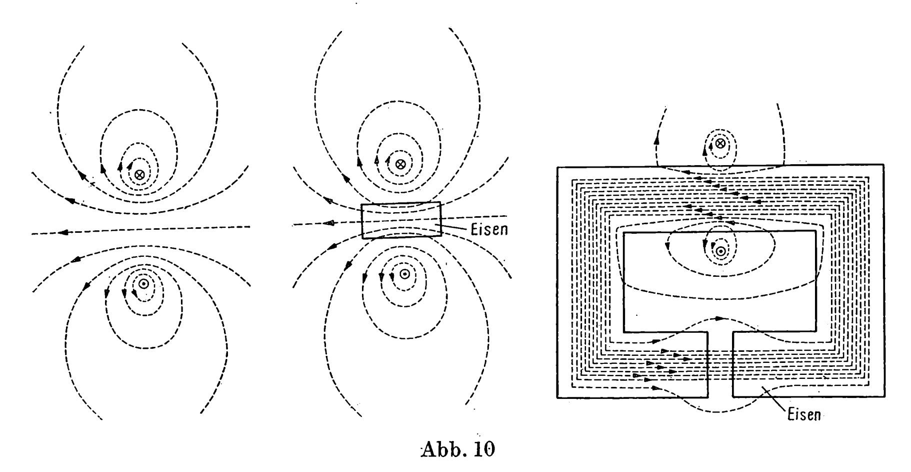


Abb. 10

Ist der magnetische Kreis geschlossen, verläuft das magnetische Feld praktisch im Eisen. Man kann daher, ähnlich wie beim elektrischen Kreis, statt mit den Feldvektoren mit den entsprechenden Integralgrößen operieren. Statt mit der Stromdichte wird mit der Durchflutung bzw. statt mit der Kraftliniendichte mit dem Fluß gearbeitet. Die Berechnungen können statt mit $\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ mit dem Durchflutungsgesetz oder mit dem von ihm nur der Form nach abweichenden magnetischen OHMschen Gesetz, das den Fluß, den magnetischen Widerstand und die magnetische Spannung verbindet, durchgeführt werden.

(8.) Berechnung der Magnetfelder

Abgesehen von dem jetzt erwähnten Fall ist die Form des Kraftlinienfeldes nicht bekannt. Das trifft auch bei einem geschlossenen Eisenkern zu, wenn die aus dem Kern heraustretenden Kraftlinien nicht vernachlässigt werden können.

a) Ist der Raum des Feldes mit Stoffen konstanter und gleicher Permeabilität ausgefüllt, was bei allen nichtferromagnetischen Stoffen annähernd der Fall ist, so ist die Verteilung des Kraftlinienfeldes durch die LAPLACEsche bzw. POISSONsche Differentialgleichung gegeben.

Die Darstellung des Feldbildes, ob sie analytisch oder graphisch durchgeführt wird, ist gleichbedeutend mit der Lösung dieser Differentialgleichungen.

Die Berechnung oder Zeichnung von Magnetfeldern in Luft, wobei vom magnetischen Standpunkt aus jedes nichtferromagnetische Material praktisch als Luft betrachtet werden kann, erfolgt mit Hilfe der genannten Differentialgleichungen. Sie ist eigentlich deren unmittelbare oder mittelbare Lösung.

b) In der Praxis kommt es oft vor, daß ein Teil des vom Feld erfüllten Raumes mit Eisen ausgefüllt ist. In vielen Fällen interessiert jedoch nur der in Luft verlaufende Teil des Feldes. Bei vielen Anordnungen müssen die Kraftlinien, um zur Spannungsinduktion nutzbar zu sein, aus dem Eisen heraustreten. Der nicht nutzbare Teil der Kraftlinien, der sogenannte Streufluß, verläuft ebenfalls in Luft.

Wenn man, wie gewöhnlich, die Permeabilität des Eisens als unendlich annimmt, treten die Kraftlinien senkrecht ein. Die Grenzflächen des Eisens gegenüber dem im allgemeinen als stromfrei angenommenen Luftteil werden zu Niveauflächen des Skalarpotentialfeldes. Der Verlauf der Kraftlinien im Eisen ist uninteressant. Wegen der unendlich großen Permeabilität gibt es im Eisen keine magnetischen Spannungen. Für das Potentialfeld der Luft gilt die LAPLACEsche Gleichung.

Diese Vorstellung kann durch zwei Erscheinungen, nämlich die gewöhnlich auf der Oberfläche des Eisens befindlichen Stromfäden und die Sättigung des Eisens, modifiziert werden. Darauf wird später jeweils eingegangen.

Wird die Permeabilität des Eisens nicht als unendlich groß, sondern als konstant angesehen, dann ist innerhalb des Eisens die entsprechende Gleichung und an der Grenze des Eisenkörpers das Brechungsgesetz gültig.

(9.) Die Streuung

Die Streulinien unterscheiden sich physikalisch nicht von den nutzbaren Kraftlinien, da vom physikalischen Standpunkt aus zwischen magnetischem Kreis und magnetischem Feld kein Unterschied gemacht werden kann. Ist der Verlauf der Streulinien annähernd bekannt, so kann das Durchflutungsgesetz direkt angewandt werden (z. B. bei der Nutenstreuung). Ist dies nicht der Fall, so muß das Streulinienbild nach (2.) aufgebaut und hieraus die Größe der Streuung gezeichnet oder berechnet werden (z. B. bei der Streuung eines Wendepoles).

2.222 Berechnung der magnetischen Kreise

(10.) Allgemeines. Magnetisches OHMsches Gesetz. Superposition

Das magnetische Feld wird am allgemeinsten durch die LAPLACEschen bzw. POISSONschen Gleichungen beschrieben und durch die in diesen Gleichungen enthaltenen differentiellen Feldvektoren (Feldstärke, Induktion und Stromdichte) gekennzeichnet. Ist der Verlauf der Kraftlinien bereits mit guter Nähe-

rung bekannt, entweder aus Symmetriegründen oder weil vollkommen geschlossene oder nur durch kurze Luftspalte unterbrochene Eisenkerne die Flußlinien verdichten, dann können die differentiellen Feldvektoren durch ihre Integralgrößen, Fluß und Stromstärke, ersetzt werden. Einen solchen geschlossenen, röhrenförmigen Teil eines magnetischen Feldes, der einen bestimmten Induktionsfluß führt, nennt man einen magnetischen Kreis. Aus der Wand dieser Röhre treten entweder keine oder nur wenige Induktionslinien, die Streulinien, aus. Sind ihre Anzahl und die Stellen, an denen diese austreten, bekannt, kann man sie als Abzweigungen ebenfalls berücksichtigen.

Der Fluß ist im geschlossenen, nicht abzweigenden Kreis überall konstant. Die Induktion verändert sich mit dem Querschnitt.

Die allgemeine Form des Durchflutungsgesetzes ist unmittelbar auf magnetische Kreise anwendbar. Die abgeänderte Form, das OHMsche Gesetz des magnetischen Kreises, entspricht jedoch besser den integralen Verhältnissen.

Führt man im Durchflutungsgesetz

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \Theta$$

die Integration längs einer bekannten Kraftlinie aus, kann der Vektor $\mathfrak{H}$ durch seinen Betrag H ersetzt werden. Setzt man dann $H = \frac{\Phi}{\mu F}$ ein und schreibt den konstanten Fluß vor das Integralzeichen, dann ist

$$\Phi \int \frac{d s}{\mu F} = \Theta. \tag{2.10}$$

$\int \frac{d s}{\mu F} = R_m$ wird *Widerstand des magnetischen Kreises* genannt. Der reziproke Wert ist die *magnetische Leitfähigkeit* Λ. Die Durchflutung ist gleich der magnetischen Umlaufspannung oder „Kreisspannung“

$$U_{m\,\mathrm{Kreis}} = \Theta. \tag{2.11}$$

Die magnetische Kreisspannung ist also gleich dem Produkt aus dem magnetischen Strom (Fluß Φ) und dem magnetischen Widerstand

$$\Theta = \Phi \cdot R_m. \tag{2.12}$$

(2.12) ist das OHMsche Gesetz des magnetischen Kreises. In der Elektrotechnik wird sehr häufig eine Darstellung in der Form

$$\Phi = \Theta \cdot \Lambda \tag{2.13}$$

gewählt.

Wegen der Analogie zwischen magnetischem und elektrischem Stromkreis kann man für jeden magnetischen Kreis einen elektrischen Ersatzstromkreis angeben. Es soll der elektrische Ersatzstromkreis für den magnetischen Kreis, der in Abb. 45 dargestellt ist, aufgezeichnet werden. Die konstante Durchflutung wird durch eine Gleichstromquelle, z. B. eine Akkumulatorenbatterie, ersetzt. Die einzelnen Abschnitte des Eisenkernes werden durch elektrische

Widerstände ersetzt. Dabei tritt der elektrische Strom des Kreises an die Stelle des Flusses.

Die Analogie zwischen dem magnetischen und dem elektrischen OHMschen Gesetz ist nur formal. Magnetische und elektrische Kreise sind physikalisch grundlegend verschieden; nur die Art ihrer Berechnung ist ähnlich. Der elektrische Strom ist die wirkliche Bewegung von Ladungen. Der magnetische Fluß charakterisiert dagegen nur einen Zustand des Raumes oder eines Stoffes. Die Analogie ist auch hinsichtlich der Rechnung nicht vollständig. Die Permeabilität ferromagnetischer Stoffe zeigt nämlich zwei wesentliche Abweichungen von der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit, die bei gegebener Temperatur konstant ist, so daß der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung linear ist. Die spezifische magnetische Leitfähigkeit ferromagnetischer Stoffe ist hingegen eine Funktion der Durchflutung bzw. des Flusses. Sie ist außerdem von der magnetischen Vorgeschichte des Eisenmaterials abhängig, d.h. davon, wie der betreffende Punkt auf der Hysteresisschleife erreicht wurde. In einem elektrischen Gleichstromkreis, bei dem eine lineare Beziehung zwischen Strom und Spannung besteht, ist es gleichgültig, ob der Strom gegeben ist und die Spannung gesucht wird oder umgekehrt. Bei einem magnetischen Kreis ist es, wie später noch gezeigt wird, einfacher, die magnetische Spannung für einen gegebenen Fluß zu bestimmen, als umgekehrt. In diesem Falle gelangt man wegen der unregelmäßigen Form der Magnetisierungskurve oft nur durch wiederholte Versuche oder graphische Methoden zum Ziel.

Besonders vorsichtig muß man bei der Lösung von Aufgaben vorgehen, bei denen überlagerte Magnetfelder auftreten. Ist der ganze Feldabschnitt mit Luft und anderen Stoffen konstanter Permeabilität ausgefüllt und wird das Magnetfeld durch mehrere Ströme erzeugt, dann können die Feldstärken und ebenso die Induktionen vektoriell addiert werden. Die resultierende Feldstärke oder Induktion wird in einem bestimmten Punkt erhalten, indem man die Vektoren $\mathfrak{H}_\varkappa$ und $\mathfrak{B}_\varkappa$ bestimmt, die von den gesondert betrachteten einzelnen Strömen erzeugt werden und deren Resultierende konstruiert.

Sind im Feldabschnitt ferromagnetische Stoffe vorhanden, dann können im allgemeinen weder die Feldstärken noch die Induktionen, sondern nur die Durchflutungen addiert werden. Die Verteilung der Feldstärke längs einer bestimmten Kurve ändert sich entsprechend der Durchflutung, ebenso die Permeabilität. Das Durchflutungsgesetz gibt nur über die Summe der einzelnen Teilspannungen Auskunft, nicht dagegen über deren Verteilung.

Im Spezialfall eines vollständig symmetrischen, geschlossenen Kreises aus absolut homogenem Stoff, z.B. einem Kreisring, bei dem sich die Durchflutung bzw. die magnetische Kreisspannung längs eines gegebenen geschlossenen Weges gleichmäßig verteilen und somit H überall gleich groß ist, ist die Addition der Feldstärken gleichwertig mit der Summation der Durchflutungen. Eine Addition der Induktionen ist jedoch auch hier nicht erlaubt, da die Magnetisierungskurve nicht linear ist. Die Summe zweier B-Werte, die auf der Magnetisierungskurve zu zwei verschiedenen H-Werten gehören, ist nicht genauso groß wie die sich aus der resultierenden Feldstärke ergebende Induktion.

Ein zweiter Umstand führt ebenfalls zu einem erheblichen Unterschied zwischen den Berechnungen magnetischer und elektrischer Kreise. Ein magnetischer Kreis kann nur mit viel gröberer Annäherung berechnet werden als ein elektrischer. Der Grund ist darin zu suchen, daß es zwar sehr gute elektrische Isolatoren gibt, jedoch keine guten magnetischen. Das Widerstandsverhältnis zwischen einem elektrischen Leiter und einem guten Isolator ist etwa $1 : 10^{20}$, während die Permeabilität der gewöhnlichen Eisenmaterialien nur etwa das 100 bis 1000fache der Permeabilität nichtferromagnetischer Stoffe ist. Es ergeben sich unter Umständen noch viel ungünstigere Werte. Das hängt davon ab, an welcher Stelle der Magnetisierungskurve gerade gearbeitet wird. Die Untersuchung magnetischer Kreise kann daher nie ganz von der allgemeinen Untersuchung des magnetischen Feldes getrennt werden. Diese gibt nämlich erst den erforderlichen Aufschluß über die Qualität und Quantität des Streukraftlinienbildes.

Die Analogie zwischen magnetischem Fluß und elektrischem Strom bietet jedoch eine weitere formale Hilfe bei der Berechnung magnetischer Kreise in Reihen- bzw. Parallelschaltung. Die KIRCHHOFFschen Gesetze gelten formal auch für magnetische Kreise.

Für magnetische Reihenschaltungen kann das 2. KIRCHHOFFsche Gesetz folgendermaßen formuliert werden:

Die magnetischen Widerstände bzw. die magnetischen Spannungen von Abschnitten verschiedener Querschnitte und verschiedener Permeabilität können addiert werden. In einem geschlossenen Kreis ist die Summe der magnetischen Spannungen der einzelnen Abschnitte gleich der umschlossenen Durchflutung.

Für magnetische Parallelschaltungen kann als 1. KIRCHHOFFsches Gesetz formuliert werden: Die Summe der Magnetflüsse, die zu den einzelnen Knotenpunkten verlaufen, und derjenigen, die diese verlassen, ist Null.

In der Praxis handelt es sich vorwiegend um die Berechnung von magnetischen Kreisen aus homogenen Abschnitten mit konstantem Querschnitt. Das Linienintegral der Feldstärke bzw. der Ausdruck für den magnetischen Widerstand wandeln sich dann in einen Summenausdruck um. Für Abschnitte in Reihenschaltung gilt

$$\oint H\,ds = \sum_{\varkappa} H_{\varkappa} s_{\varkappa} = H_1 s_1 + H_2 s_2 + \cdots + H_K s_K$$

bzw.

$$\int \frac{ds}{\mu F} = \sum_{\varkappa} \frac{s_{\varkappa}}{\mu_{\varkappa} F_{\varkappa}} = \frac{s_1}{\mu_1 F_1} + \frac{s_2}{u_2 F_2} + \cdots + \frac{s_K}{\mu_K F_K},$$

also

$$\Theta = \sum_{\varkappa} U_{m_{\varkappa}} = U_{m_1} + U_{m_2} + \cdots + U_{m_K} = \Phi \left(R_{m_1} + R_{m_2} + \cdots + R_{m_K}\right).$$

Dabei ist $U_{m_{\varkappa}}$ die magnetische Spannung des $\varkappa$-ten Abschnittes:

$$U_{m_{\varkappa}} = \Phi \cdot R_{m_{\varkappa}} = \Phi \frac{s_{\varkappa}}{\mu_{\varkappa} F_{\varkappa}}. \tag{2.14}$$

Dabei bedeuten $R_{m\varkappa}$ den magnetischen Widerstand, $s_\varkappa$ die Länge, $\mu_\varkappa$ die Permeabilität, $F_\varkappa$ den Querschnitt des $\varkappa$-ten Abschnittes und Φ den gemeinsamen Fluß. (2.14) ist analog gebaut dem Ausdruck für den Spannungsabfall in einem elektrischen Stromkreisabschnitt.

Verzweigt sich der magnetische Kreis an einer Stelle, dann gilt dort

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_K = U_m \Lambda = U_m(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \cdots + \Lambda_K).$$

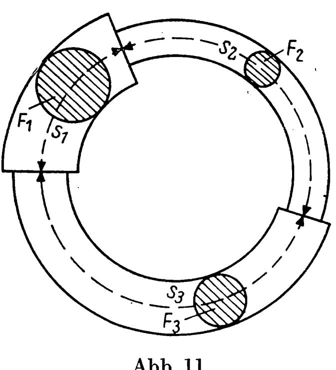


Abb. 11

Darin bedeuten Φ_1, Φ_2, ... den Fluß, Λ_1, Λ_2, ... den magnetischen Leitwert der einzelnen Zweige, U_m den gemeinsamen magnetischen Spannungsabfall und Λ den resultierenden Leitwert zwischen den Endpunkten der parallelen Zweige.

(11.) Reihenschaltung einzelner Kreise

Bei zusammengesetzten Reihenschaltungen (Abb. 11) gibt es zwei verschiedene Aufgaben zu lösen.

a) Φ ist gegeben, und die erforderliche Durchflutung ist zu bestimmen (Beispiele 1, 2, 3, 5, 18).

Vernachlässigt man die Streuung, dann ist der Fluß in jedem Abschnitt konstant. Unter der Annahme, daß der Fluß in den einzelnen Abschnitten längs des Querschnittes gleichmäßig verteilt ist, ergeben sich die Induktionen der einzelnen Abschnitte zu

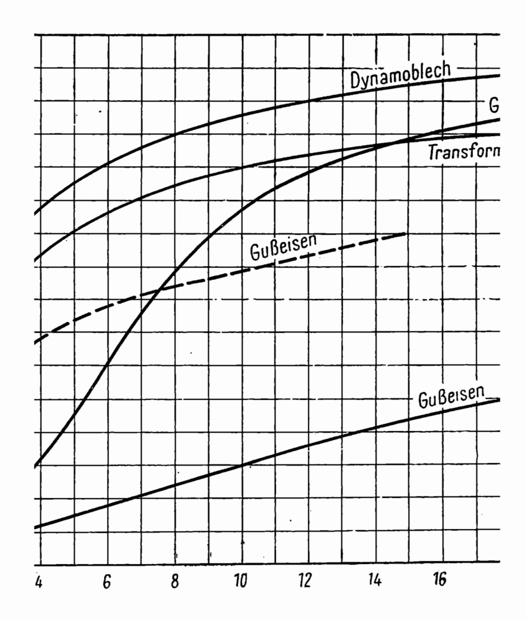
$$B_1 = \frac{\Phi}{F_1}, \quad B_2 = \frac{\Phi}{F_2}, \ldots$$

Aus den Magnetisierungskurven der einzelnen Abschnitte (Abb. 12) kann die jeder Induktion entsprechende Feldstärke entnommen werden. Für Luft ist $H = \frac{B}{\mu_0}$. Das Produkt aus Feldstärke und Länge ist die magnetische Spannung eines Abschnittes. Um den erwünschten Fluß in einem geschlossenen Kreis aufrechtzuerhalten, ist die Durchflutung

$$\Theta = H_1 s_1 + H_2 s_2 + \cdots + H_K s_K$$

erforderlich. Bringt man die Durchflutung in Form einer Spule an, z. B. bei einem geschlossenen Eisenkern, so ist die Zahl der Stromfäden und der Windungen, die das Kernfenster durchsetzen, gleich groß. In jeder Windung fließt der gleiche Strom. Bei bekannten Windungszahlen ergibt sich demzufolge

$$i = \frac{\Theta}{w}.$$


Dynamoblech
G
Transforn
Gußeisen
Gußeisen
4
6
8
10
12
14
16

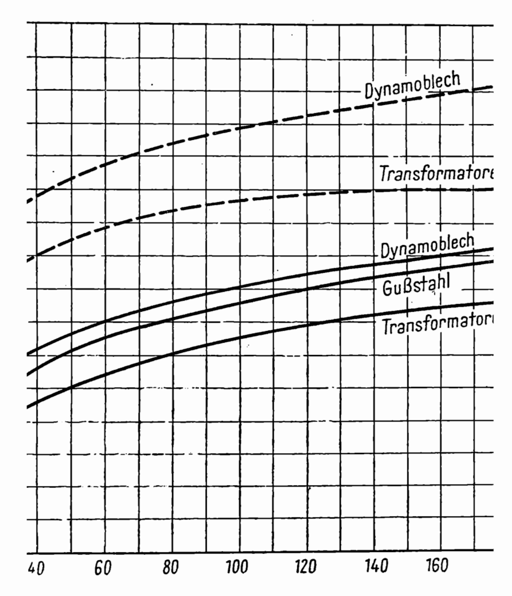

Dynamoblech
Transformatore
Dynamoblech
Gußstahl
Transformator
40
60
80
100
120
140
160

Abb. 12

Ist die Verteilung des Flusses zwar bekannt, aber nicht gleichmäßig, so wird die für den jeweiligen Abschnitt benötigte magnetische Spannung aus dem mittleren Wert der Feldstärke berechnet, die den Induktionen längs des Querschnittes entspricht.

Auf ähnliche Weise kann näherungsweise die magnetische Spannung eines bestimmten Abschnittes ermittelt werden, wenn sich die Induktion längs des Abschnittes ständig ändert, weil sich entweder der Querschnitt ändert oder weil Streulinien auftreten. Der Abschnitt wird in kurze Teilabschnitte aufgeteilt und die Induktion innerhalb dieser Teilabschnitte als konstant angenommen. Die magnetische Spannung des Abschnittes ist gleich der Summe der magnetischen Spannungen der Teilabschnitte. Hiermit übereinstimmend wird die mittlere Feldstärke bestimmt. Die magnetische Spannung ist dann gleich diesem Mittelwert, multipliziert mit der gesamten Länge (Beispiel 12).

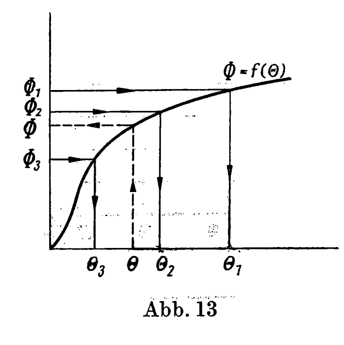


Abb. 13

b) Es soll nun die Durchflutung gegeben sein, und der Fluß sei zu bestimmen (Beispiele 4, 10). Diese Aufgabe kann nur für einen geschlossenen Kreis aus einem homogenen Abschnitt mit konstantem Querschnitt direkt gelöst werden. Bei anderen Anordnungen ist das nicht direkt möglich, weil die Permeabilitäten der einzelnen Abschnitte Funktionen des unbekannten Φ bzw. B sind. Die Verteilung von $\sum_{\varkappa} U_{m\varkappa} = \Theta$ auf die einzelnen Abschnitte hängt jedoch von den jeweiligen Permeabilitäten ab. Für die Lösung dieser Aufgabe gibt es zwei Möglichkeiten.

α) Lösung durch Abschätzung

Hierbei wird die Verteilung der magnetischen Kreisspannung auf die einzelnen Abschnitte, z. B. für Luftspalt und Eisen, abgeschätzt. In einem Abschnitt kann man aus dem abgeschätzten U_m zuerst H, dann B und hieraus Φ bestimmen. Aus Φ kann die magnetische Teilspannung für jeden Abschnitt und infolge davon auch deren Summe Θ berechnet werden. Der auf diese Weise erhaltene Wert weicht im allgemeinen von dem bekannten Wert ab. Man wiederholt den ganzen Vorgang mit neuen Abschätzungen so lange, bis sich eine befriedigende Übereinstimmung zwischen den beiden Θ-Werten ergibt. Mit einer gewissen Übung ergibt sich bereits beim zweiten Versuch gute Übereinstimmung.

β) Lösung auf graphischem Wege (Abb. 13)

Einige wahrscheinliche Φ-Werte werden angenommen und daraus die zugehörigen Θ-Werte berechnet. Mit diesen Werten wird die Kurve $\Phi = f(\Theta)$, die Magnetisierungskurve des Kreises, aufgezeichnet, und daraus ergibt sich Φ für jeweils gegebene Θ (Beispiel 7).

Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man zum angenommenen Fluß die Magnetisierungskurve jedes Abschnittes, also die Kurven $\Phi = f(U_{m\varkappa})$ einzeln aufträgt. Der Fluß ist in jedem Abschnitt derselbe, so daß die den einzelnen Werten von Φ entsprechenden magnetischen Spannungen summiert werden können. Man erhält auf diese Weise die Kurve

$$\Phi = f(U_{m_1} + U_{m_2} + \cdots) = f(\Theta),$$

also die Magnetisierungskurve des gesamten Kreises.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß das Prinzip der Superposition bei magnetischen Kreisen mit Eisenkern nicht gültig ist. Befindet sich in der Mitte eines homogenen geschlossenen Eisenkerns ein einziger, vom Strom i durchflossener vertikaler Leiter, so hat er eine mittlere Feldstärke H entlang der Mittellinie des eisernen Ringes zur Folge. Dazu läßt sich eine Induktion aus der Magnetisierungskurve entnehmen. Wird ein zweiter Leiter, der von einem gleichgroßen Strom durchflossen wird, parallel zum ersten Leiter angeordnet, dann wird die Feldstärke H im Ring doppelt so groß. Die Induktion dagegen vergrößert sich nur wenig. Befindet sich jedoch im Ring ein kleiner Luftspalt, so wächst die Feldstärke beim Anbringen des zweiten Leiters nicht auf den doppelten Wert. Die magnetische Umlaufspannung, die zur Durchflutung $2i$ gehört, verteilt sich nämlich nicht im gleichen Verhältnis zwischen Luft und Eisen, wie diejenige, die zur Durchflutung i gehört, weil sich nämlich die Permeabilität des Eisens verändert hat, die des Luftspaltes dagegen nicht.

Zusammenfassend kann gesagt werden: In magnetischen Kreisen, die ferromagnetische Materialien enthalten, können im allgemeinen nur die Durchflutungen summiert werden. In den einzelnen Punkten eines magnetischen Kreises dürfen jedoch weder die Feldstärken, erzeugt durch die einzelnen Ströme, noch die Induktionen summiert werden. Bei nur in Luft befindlichen magnetischen Kreisen, in deren Nähe sich kein Eisen befindet, können die durch die verschiedenen Ströme gesondert erzeugten Feldstärken und die Induktionen vektoriell addiert werden.

(12.) Parallelschaltung einzelner Kreise

Bei parallelgeschalteten magnetischen Wegen ist die magnetische Spannung allen Wegen gemeinsam, und der resultierende Fluß ist die Summe der einzelnen Teilflüsse (Beispiele 11, 17, 19).

a) Befinden sich die Feldabschnitte in Luft, sofern diese durch Vereinfachung des Flußbildes als Teile magnetischer Kreise betrachtet werden können, was sehr oft bei der Berechnung von Streuflüssen der Fall ist, dann ist es zweckmäßig, zuerst die magnetischen Leitfähigkeiten zu ermitteln (Beispiele 13, 14, 15, 16). Der Fluß der einzelnen Zweige wird dabei als Produkt der gemeinsamen magnetischen Spannung und der magnetischen Leitfähigkeit des Zweiges betrachtet (Beispiel 19).

Ist dagegen der gesamte Fluß gegeben, dann verteilt er sich im Verhältnis der Leitfähigkeiten der Zweige. Die magnetische Spannung ist der Quotient aus dem Fluß und der Leitfähigkeit eines jeden Zweiges.

b) α) Ist die magnetische Spannung der einzelnen parallelen Zweige mit konstantem Querschnitt gegeben, kann der Fluß auch dann leicht ermittelt werden, wenn das Material der einzelnen Zweige aus Eisen besteht. Das geht aus der Berechnung von Φ_z in Beispiel 19 hervor.

β) Sind jedoch auch ferromagnetische Abschnitte vorhanden und ist der gesamte Fluß gegeben, dann löst man zweckmäßig die Aufgabe graphisch. Der unbekannte magnetische Spannungsabfall ist bei allen Zweigen gleich. Es werden daher zuerst die Magnetisierungskurven der einzelnen Abschnitte $\Phi_\varkappa = f_\varkappa(U_m)$ aufgezeichnet. Dann werden in der Zeichnung die zu einzelnen ausgewählten U_m-Werten gehörenden Teilflüsse addiert und so die resultierende Magnetisierungskurve $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots = f(U_m)$ erhalten. Hieraus kann zu einem gegebenen Φ der Wert von U_m entnommen werden (Beispiel 11).

(13.) Kreise in Reihen-Parallelschaltung

Ist der Kreis eine Reihen-Parallelschaltung (Beispiele 6, 7, 8, 9), so gilt für die Flüsse an den Abzweigungen das Knotenpunktgesetz und für die einzelnen Schleifen, sofern sie geschlossene Kreise sind, das Durchflutungsgesetz. Bei der Lösung solcher Aufgaben ist es oft zweckmäßig, das Durchflutungsgesetz für solche geschlossenen Kreise, z. B. Fenster eines Eisenkerns, innerhalb deren sich kein stromführender Leiter befindet, aufzuschreiben. In diesem Fall ist die Durchflutung Null.

So kann z. B. für zwei parallele homogene Abschnitte, die keine Erregung umschließen, bei Kenntnis der Feldstärke des einen Abschnittes die des anderen berechnet werden (Beispiel 6).

In den meisten Fällen ist man jedoch auf wiederholte Versuche (Beispiel 8) oder auf graphische Ermittlung (Beispiele 7, 9b) angewiesen. Das gilt besonders, wenn bei gegebener Durchflutung oder Durchflutungen der Fluß oder die Induktion eines bestimmten Zweiges ermittelt werden soll.

(14.) Berücksichtigung der Streuung

Sehr oft darf die Streuung des magnetischen Kreises nicht vernachlässigt werden. Sie kann manchmal das Mehrfache des nutzbaren Flusses betragen (Beispiel 20 oder bei dem Wendepol von Gleichstrommaschinen).

Die Streuung kann durch genaue Bestimmung und Auswertung des Magnetfeldes (Beispiele 27, 28), durch Berechnung der Leitwerte der Streuwege an Hand des vereinfachten Bildes des Streuflusses (Beispiele 19, 21), durch Abschätzung aus den Daten ähnlicher Anordnungen (Beispiel 18) oder mit Hilfe von Modellversuchen (Beispiel 20) berücksichtigt werden.

2.223 Bestimmung des Magnetfeldes

Das Feld wird außerhalb des Eisens durch die Poissonsche Differentialgleichung und im stromfreien Teil durch die Laplacesche Differentialgleichung beschrieben. Bei der Lösung von Aufgaben ergeben sich im allgemeinen keine

Schwierigkeiten bei der Lösung der Differentialgleichungen, sondern bei der Erfüllung der Grenzbedingungen. Ferromagnetische Stoffe werden in jedem Falle nach den vorstehend angeführten Gesichtspunkten berücksichtigt.

a) Rechnerische Lösung in (15.) bis (22.)

(15.) Lösung mit Hilfe des Vektorpotentials (Beispiele 22a und 27)

Aus der Gleichung (1.69) für $\mu = \mu_0$

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = -\mu_0 \mathfrak{G}$$

folgt für das Vektorpotential[18]

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathfrak{G}\, dv}{r}.$$

Das Vektorpotential werde in einem bestimmten Punkt P gesucht. Dazu wird in P ein Vektor gezeichnet, dessen Richtung mit dem Vektor der Stromdichte $\mathfrak{G}$ in einem beliebigen Punkt des Feldes übereinstimmt. Die Größe dieses Vektors beträgt $\frac{\mathfrak{G}\, dv}{r}$, wobei r die Entfernung zwischen den beiden Punkten ist. Ferner werden in P die aus allen übrigen im Felde auftretenden Stromdichten $\mathfrak{G}$ sich ergebenden Vektoren $\frac{\mathfrak{G}\, dv}{r}$ gezeichnet. Die Resultierende all dieser Vektoren, im Verhältnis $\frac{1}{4\pi}$ verkleinert, ist dann das Vektorpotential in P. In der Praxis werden die drei rechtwinkligen Komponenten einzeln berechnet und vektoriell addiert. Aus dem so berechneten Vektor kann die Feldstärke nach der Beziehung

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}' \quad \left(\mathfrak{A}' = \frac{\mathfrak{A}}{\mu_0}\right)$$

ermittelt werden. Hieraus folgt für die Induktion $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \mu_0 \mathfrak{H}$.

In der Praxis beschränkt man sich meist auf die Lösung zweidimensionaler Probleme.

Im zweidimensionalen Feld verlaufen alle Stromfäden senkrecht zur Zeichenebene, ebenso die Vektorpotentiale. Diese parallel verlaufenden Vektorpotentiale können wie Skalare algebraisch addiert und subtrahiert werden.

Bei rechtwinkligen Koordinaten lautet dann die Differentialgleichung (1.69)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}'}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 A_z'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z'}{\partial y^2}\right) \cdot \mathfrak{k} = -\mathfrak{G}.$$

Für $\mathfrak{H}$ gilt
$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}' = \frac{\partial A_z'}{\partial y} \mathfrak{i} - \frac{\partial A_z'}{\partial x} \mathfrak{j}.$$

Mit $A_z' = A'$ ergibt sich

$$H_x = \frac{\partial A'}{\partial y} \quad \text{und} \quad H_y = -\frac{\partial A'}{\partial x}.$$

In zweidimensionalen Feldern sind die Kraftlinien dadurch gekennzeichnet, daß das Vektorpotential längs dieser Kraftlinien konstant ist. Für $A' = \text{const}$ ist

$$dA' = \frac{\partial A'}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial A'}{\partial y} dy = 0$$

und daher

$$\frac{dy}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial A'}{dx}}{\dfrac{\partial A'}{\partial y}} = \frac{H_y}{H_x}.$$

Die Richtung der Kurve $A' = \text{const}$ ist also in jedem Punkt identisch mit der Richtung der Feldstärke, d.h., daß die Kurven konstanten Vektorpotentials im zweidimensionalen Feld mit den Kurven der Feldstärke übereinstimmen.

Da das magnetische Feld in seinen stromfreien Teilen, gemäß der LAPLACEschen Gleichung

$$\nabla^2 V = 0$$

durch ein Skalarpotential dargestellt werden kann, kann das Skalarpotential aus dem Vektorpotential errechnet werden. Für einen Weg von 1 nach 2, der keinen Stromfaden schneidet, gilt

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 (H_x dx + H_y dy).$$

Durch Einsetzen von

$$H_x = \frac{\partial A'}{\partial y} \quad \text{und} \quad H_y = -\frac{\partial A'}{\partial x}$$

folgt

$$V_1 - V_2 = -\int_1^2 \left(\frac{\partial A'}{\partial x} dy - \frac{\partial A'}{\partial y} dx \right).$$

Man kann also das Skalarpotential aus dem Vektorpotential errechnen.

Im zweidimensionalen Feld ist es statthaft, die Skalarpotentiale und die Vektorpotentiale algebraisch zu überlagern. Man erhält daher das resultierende Potential bei beliebiger Stromverteilung im Feldraum durch einfache Summation.

(16.) Linienförmige geschlossene Stromkreise (Aufgaben 22b, 25)

Unter linienförmigen geschlossenen Stromkreisen versteht man aus dünnen Leitern gebildete Schleifen (Abb. 14). Man kann die Feldstärke in jedem Punkt des magnetischen Kreises unmittelbar mit Hilfe des AMPÈREschen oder BIOT-SAVARTschen Gesetzes berechnen. Dies stimmt im wesentlichen mit dem Ausdruck des Vektorpotentials überein und ist daraus abzuleiten.

Fließt im Leiter mit dem Querschnitt dF ein Strom i und beträgt seine Elementarstrecke $d\mathfrak{s} = \mathfrak{t}\, ds$, wobei $\mathfrak{t}$ der tangentiale Einheitsvektor ist, dann gilt

$$\mathfrak{G} = \frac{i}{dF}\mathfrak{t} \quad \text{und} \quad dv = dF \cdot ds.$$

Hieraus findet man das Vektorpotential in einem beliebigen Punkt

$$\mathfrak{A}' = \frac{1}{4\pi}\oint\frac{\mathfrak{G}\, dv}{r} = \frac{i}{4\pi}\oint\frac{1}{dF}\mathfrak{t}\frac{dF\cdot ds}{r} = \frac{i}{4\pi}\oint\frac{\mathfrak{t}}{r}ds.$$

Die Feldstärke beträgt dann

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}' = \frac{i}{4\pi}\oint\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{t}}{r}ds.$$

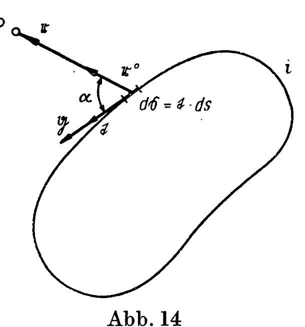


Abb. 14

Da $\mathfrak{t}$ nicht von der Lage des Punktes P abhängt, ist

$$\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{t}}{r} = \left(\operatorname{grad}\frac{s}{r}\right)\times\mathfrak{t} = -\frac{\mathfrak{r}^0}{\mathfrak{r}^2}\times\mathfrak{t} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3}\times\mathfrak{t}.$$

$\mathfrak{r}^0$ ist der Einheitsvektor in Richtung von $\mathfrak{r}$[19]. Eingesetzt in den Ausdruck für $\mathfrak{H}$ ergibt sich das AMPÈREsche oder BIOT-SAVARTsche Gesetz:

Im Aufpunkt von $\mathfrak{r}$ ist die durch die Schleifen erzeugte Feldstärke[20]

$$\mathfrak{H} = \frac{i}{4\pi}\oint\frac{d\mathfrak{s}\times\mathfrak{r}}{r^3}. \tag{2.16}$$

Schreibt man diese Beziehung in Differentialform, dann ist der Beitrag des Elementes $d\mathfrak{s}$ zur Feldstärke im Punkt P

$$d\mathfrak{H} = \frac{i}{4\pi}\frac{d\mathfrak{s}\times\mathfrak{r}}{r^3} = \left(\frac{1}{4\pi}\frac{i\, ds}{r^2}\sin\alpha\right)\mathfrak{n}. \tag{2.16a}$$

ds hat hierbei die Richtung von i, α ist der vom Schleifenelement und dem Radiusvektor eingeschlossene Winkel und $\mathfrak{n}$ ein entsprechend dem Rechtssystem gerichteter Einheitsvektor, der senkrecht auf der von $d\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ aufgespannten Ebene steht.

Es muß allerdings darauf hingewiesen werden, daß der Übergang von der Integral- zur Differentialform eine mathematisch willkürliche Verallgemeinerung ist, die eigentlich nur dadurch gerechtfertigt ist, daß die hierdurch gewonnenen Ergebnisse bisher stets den Tatsachen entsprachen.

(17.) Anwendungen des BIOT-SAVARTschen Gesetzes (Aufgaben 22c, 26)

Das Vektorprodukt $d\mathfrak{s}\times\mathfrak{r}$ ist ein Vektor, der auf der von $d\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ aufgespannten Ebene senkrecht steht. Sein Absolutbetrag ist gleich dem Flächeninhalt des von den Vektorpfeilen der beiden Vektoren gebildeten Parallelo-

gramms. Näherungsweise ist dieser gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ABP (Abb. 15): $\dfrac{2r^2 d\vartheta}{2}$.

Der Radius $\varrho = \dfrac{1}{\sqrt{r}}$ überstreicht die in der Abbildung schraffierte Fläche

$$dF = \frac{1}{2}\varrho^2 d\vartheta = \frac{d\vartheta}{2r}.$$

Der Vektor der Fläche dF fällt mit der Richtung von $d\mathfrak{s} \times \mathfrak{r}$ zusammen.

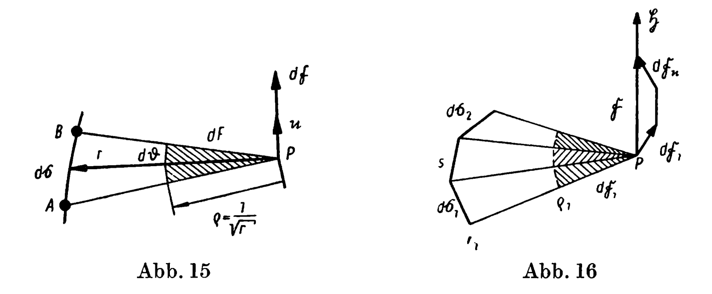


Abb. 15 Abb. 16

Durch Vergleich der beiden Flächenvektoren

$$d\mathfrak{s} \times \mathfrak{r} = r^2 d\vartheta \mathfrak{n} \quad \text{und} \quad d\mathfrak{F} = \frac{1}{2}\frac{d\vartheta}{r}\mathfrak{n}$$

findet man die Differentialform des AMPÈREschen oder BIOT-SAVARTschen Gesetzes

$$d\mathfrak{H} = \frac{i}{4\pi}\frac{d\mathfrak{s} \times \mathfrak{r}}{r^3} = \frac{2i}{4\pi} d\mathfrak{F}. \tag{2.16b}$$

Die Gesamtfeldstärke ist die Summe der von den einzelnen Elementen erzeugten Vektoren $d\mathfrak{H}$. Die Feldstärke als Wirkung des Stromes i im Punkt P (Abb. 16) ist

$$\mathfrak{H} = \int d\mathfrak{H} = \frac{2i}{4\pi}\int d\mathfrak{F} = \frac{2i}{4\pi}\mathfrak{F}. \tag{2.16c}$$

Die Berechnung wird folgendermaßen durchgeführt:
Die Fläche F, die von den Elementarkreisbögen mit dem Radius $\varrho = \dfrac{1}{\sqrt{r}}$ und den zu den beiden Enden des Leiters gezogenen Radien begrenzt wird, wird auf die Koordinatenebene projiziert. Bei Flächenproblemen ist die Projektion mit F identisch. Die Fläche der Projektion wird mit einem Planimeter oder durch Berechnung ermittelt. Dadurch erhält man die Länge der auf der Koordinatenebene senkrecht stehenden axialen Komponente von $\mathfrak{F}$. Aus den axialen Komponenten wird $\mathfrak{F}$ durch vektorielle Addition ermittelt. Die Länge

des in gleicher Richtung verlaufenden Vektors $\mathfrak{H}$ beträgt das $\frac{2i}{4\pi}$-fache des Wertes von F (Abb. 17). Die mathematische Formulierung dafür lautet

$$\mathfrak{H} = \frac{2i}{4\pi}\left[\mathfrak{i}\int dF_{yz} + \mathfrak{j}\int dF_{zx} + \mathfrak{k}\int dF_{xy}\right].$$

(18.) Magnetische Doppelschicht

Im 5. Abschnitt wurde gezeigt, daß eine geschlossene Stromkurve durch eine magnetische Doppelschicht ersetzt werden kann. Dabei gilt

$$\mathfrak{H} = -\frac{i}{4\pi}\operatorname{grad}\omega.$$

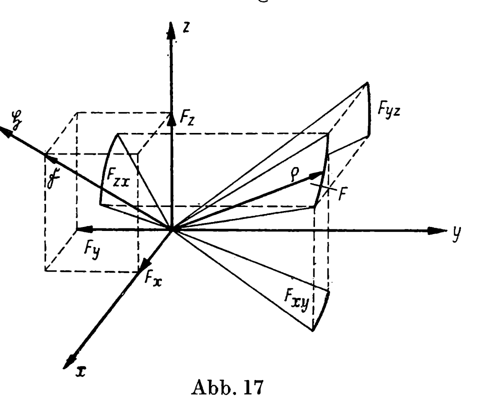
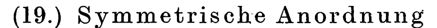


Abb. 17

ω bezeichnet den Raumwinkel, unter dem die Strombahn vom Beobachtungspunkt P aus sichtbar ist.

Man erhält die Feldstärke also auch durch Berechnung von ω. Ihre Größe ist unabhängig von der Form der magnetischen Schale (Aufgabe 22d).



(19.) Symmetrische Anordnung

Ist eine Anordnung vollkommen symmetrisch und dadurch der Verlauf der Kraftlinien bekannt, kann die Feldstärke im homogenen Medium unmittelbar aus dem Durchflutungsgesetz errechnet werden (Aufgabe 22e).

(20.) Grenzbedingungen mit Fourier-Reihen

In der Praxis besitzt oft das betrachtete, mit Luft und z. B. Kupfer erfüllte Flächenstück eine an einzelnen Stellen unterbrochene Grenzlinie aus Eisen. Die Verteilung der Feldstärke längs dieser Grenzlinie kann durch eine Kurve dargestellt werden. Sofern man die FOURIER-Reihe dieser Kurve angeben kann, sind damit die Grenzbedingungen des Feldabschnittes gegeben. Die in Luft und Kupfer verlaufenden Teile des Magnetfeldes werden mit Hilfe des Vektorpotentials aus der LAPLACEschen bzw. POISSONschen Gleichung dargestellt.

Der Vergleich der Vektorpotentiale mit der die Grenzbedingungen bestimmenden FOURIER-Reihe bringt die Lösung des Problems. An Hand der Verhältnisse in einer Nut mit Kreisquerschnitt (Abb. 18), die unter den Beispielen 27 ausführlicher behandelt sind, soll das Verfahren erklärt werden.

Die Permeabilität des Eisens wird als unendlich angenommen, wodurch die auf dem Weg s_e abfallende magnetische Spannung Null wird. Die gesamte magnetische Spannung fällt dann auf der Strecke s_1, dem Nutensteg, ab. Die Tangentialkomponente der Feldstärke ist daher im Eisen Null. Am Rand des

Luftspaltes springt sie auf den im Luftspalt als konstant angenommenen Wert. Diese Annahme ist für kleine Nutenöffnungen durchaus zulässig. Diese Verteilung von H_t im Umkreis 2π ist in Abb. 18 dargestellt. Die FOURIER-Reihe dieser Kurve besteht aus einem konstanten Glied und aus Kosinusgliedern.

Für die Bereiche I und II kann das Vektorpotential ohne besondere Schwierigkeiten angegeben und das Bild der magnetischen Kraftlinien mit Hilfe der beiden Vektorpotentiale und der FOURIER-Reihe berechnet werden.

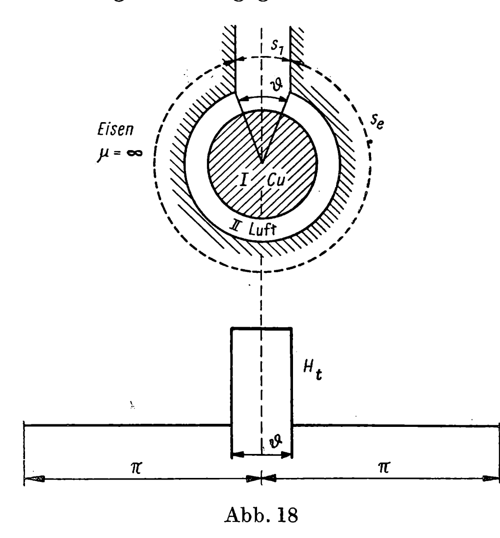


Abb. 18

Im allgemeinen sind solche Berechnungen durchaus nicht einfach.

(21.) Konforme Abbildungen
(Beispiele 23 a, 28)

Die Darstellung eines teilweise oder ganz mit Eisen ($\mu = \infty$) umrandeten, zweidimensionalen magnetischen Feldes ist gleichbedeutend mit dem Aufsuchen zweier aufeinander senkrecht stehender Kurvenscharen, die Punkte konstanten Flusses bzw. konstanten Potentials verbinden. Die Schar der Äquipotentiallinien muß die LAPLACEsche Gleichung befriedigen. Einige dieser Niveaulinien, die durch bestimmte Werte gekennzeichnet sind, müssen mit den Randlinien zusammenfallen.

Das Bild einfacher Fluß-Kurvenscharen kann durch konforme Abbildung dargestellt werden. Dies beruht auf folgenden, kurz zusammengefaßten Tatsachen. (Die streng mathematischen Ableitungen sind den Literaturnachweisen L und M zu entnehmen. Eine kurze Zusammenfassung ist in A [4] und A [5] enthalten.)

Eine analytische, differenzierbare Funktion w einer komplexen Veränderlichen $z = x + jy$,

$$w = f(z) = u\,(x, y) + j\,v\,(x, y),$$

sei in dem betrachteten Gebiet definiert, das die zu untersuchende Fläche enthält. Real- und Imaginärteil von w genügen der LAPLACEschen Gleichung(21):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Die durch solche konjugierten Funktionen charakterisierten Kurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ schneiden sich überall unter einem rechten Winkel[22]. Sie können also die Kraftlinien und die Äquipotentiallinien sein.

Die Funktion $w = u + jv = f(x + jy)$ ordnet jedem Punkt der z-Ebene einen bestimmten Punkt der w-Ebene zu. Es wird also die z-Ebene auf die w-Ebene und umgekehrt abgebildet. Die Abbildung ist, sofern die Funktion analytisch ist, an den Stellen $f'(z) \neq 0$ winkeltreu und im Kleinen streckentreu und wird konforme Abbildung genannt. Einem Element bestimmter Form von w entspricht in der z-Ebene ein Element derselben Form. Dieses ist lediglich in seinen linearen Dimensionen in bestimmtem Maße gewachsen und um einen gegebenen Winkel gedreht. Die Winkelkonstanz hat zur Folge, daß, sofern sich die Linien in der einen Ebene senkrecht schneiden, dies auch die entsprechenden Linien in der anderen Ebene tun.

Man kann also mit Hilfe der konformen Abbildung die zu den Koordinatenachsen parallelen Niveau- bzw. Kraftlinien der Ebene u, v durch eine oder mehrere entsprechende Transformationen unter Beachtung der Randbedingungen in die gesuchte Form übertragen. Dabei kann u das Potential und v den Fluß, oder auch umgekehrt, bedeuten.

Diese Aufgabe ist bereits am Anfang so formuliert worden, wie sie in der Praxis auftritt. Es soll z.B. das Feldbild zwischen zwei Eisenflächen, von denen die eine im Unendlichen liegen kann, aufgezeichnet werden. Die Grenzbedingungen sind in diesem Fall dadurch gegeben, daß die durch gewisse vorgeschriebene Potentialwerte charakterisierten Geraden der w-Ebene in die Konturlinien der Eisenfläche in der z-Ebene übergehen sollen. Die Funktion, die diese Abbildung bewirkt, soll den Parallelstreifen der w-Ebene in den von der Kontur der Eisenfläche begrenzten Bereich der z-Ebene überführen (Abb. 82). Der Parallelstreifen kann sich auch im Unendlichen ausbreiten, also z.B. eine Halbebene bilden (Abb. 19 oder 103). Ist die Abbildungsfunktion bekannt, dann kann das Feld durch Einsetzen entsprechender Werte $u = \text{const}$ bzw. $v = \text{const}$ gezeichnet werden. Ebenso ist die unmittelbare Auswertung durch Rechnung möglich. Gewöhnlich wird die Verteilung der Induktion entlang irgendeiner Niveaulinie, die zwischen den Eisenflächen verläuft, durch Gradientenbildung ermittelt. Es ist

$$B_x = -\mu_0 \frac{\partial U_m}{\partial x},$$

$$B_y = -\mu_0 \frac{\partial U_m}{\partial y}.$$

Nach dem Einsetzen von $U_m = u$ ergibt sich

$$B = \mu_0 \left[-\frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \mu_0 \left[-\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}\right] = -\mu_0 \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]^* .^{1)}$$

---

[1]) Das Zeichen * bezeichnet die konjugiert komplexe Größe.

Daraus folgt entsprechend dem Zusammenhang $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz}$

$$B = -\mu_0 \left[\frac{dw}{dz}\right]^* \tag{2.17}$$

und

$$|B| = \left|-\mu_0 \left[\frac{dw}{dz}\right]^*\right|. \tag{2.17a}$$

Eine Transformation, die eine gegebene Anordnung befriedigt, kann im allgemeinen nur durch wiederholte Versuche gefunden werden. Der mathematische Weg führt nur bei einfachen Gebilden zum Ziel. Selbst dann sind noch komplizierte Berechnungen notwendig. Man geht daher meist den umgekehrten Weg. Man wählt gewisse Funktionen und untersucht, welche Randbedingungen von Anordnungen praktischer Bedeutung durch die Transformation befriedigt werden.

In dem für die Praxis wichtigen Fall, daß die begrenzenden Äquipotentiallinien Geraden sind, führt die SCHWARZ-CHRISTOFFELsche Transformation unmittelbar zum Ziel. Damit kann die obere Hälfte der z-Ebene in einem von einem Vieleck umrandeten Bereich der w-Ebene überführt werden. Dabei geht die reelle Achse der z-Ebene in das Vieleck der w-Ebene über. Das Polygon kann auch offen sein, d.h., es können Seiten vorkommen, deren Schnittpunkte, die Eckpunkte des Polygons also, im Unendlichen liegen[(23)].

Ist in der Aufgabe ein Vieleck gegeben, dann kann nach Schwarz eine Differentialgleichung aufgestellt werden, die nach Integration eine Funktion liefert, die die gewünschte Transformation ausführt. Die Differentialgleichung lautet

$$\frac{dw}{dz} = \frac{C}{(z - z_1)^{\gamma_1}(z - z_2)^{\gamma_2} \cdots (z - z_n)^{\gamma_n}}. \tag{2.18}$$

Die Integration liefert

$$w = C \int \frac{dz}{(z - z_1)^{\gamma_1}(z - z_2)^{\gamma_2} \cdots (z - z_n)^{\gamma_n}} + C_1. \tag{2.18a}$$

Dabei sind die γ_k die in π-Einheiten gemessenen Außenwinkel des Polygons der w-Ebene, d.h. die Winkel, die von den im Umlaufsinn aufeinanderfolgenden Seiten gebildet werden (Abb. 19). Die z_k sind die Punkte in der z-Ebene, die den Eckpunkten entsprechen. Die Punkte der reellen x-Achse und die Ecken des Polygons müssen so aufeinander folgen, daß beim Fortschreiten längs der x-Achse die obere Halbebene und beim Durchlaufen der Eckpunkte der innere Teil des Polygons stets zur linken Seite liegen.

Bei der Ausführung der Abbildung sind drei Punkte willkürlich wählbar. Man kann also drei Eckpunkten des gegebenen Polygons drei beliebige Punkte der x-Achse zuordnen. Dadurch sind bereits die Maßstabverhältnisse der

w-Ebene zur z-Ebene festgelegt. Die Lage der übrigen Punkte auf der x-Achse ergibt sich durch entsprechende Anwendung der Abbildungsgleichung.

Die komplexe Konstante C bestimmt die Größe und die Orientierung, C_1 die Lage des Vielecks. Für die Berechnung dieser beiden Konstanten kann allerdings keine allgemeingültige Anweisung gegeben werden.

Weist das Polygon an irgendeiner Stelle einen einspringenden Winkel auf, dann muß der Innenwinkel in Betracht gezogen werden, und γ_k wird dann negativ sein. Die mit den Eckpunkten korrespondierenden Punktpaare w_k, z_k sind die Singularitätsstellen der Abbildung.

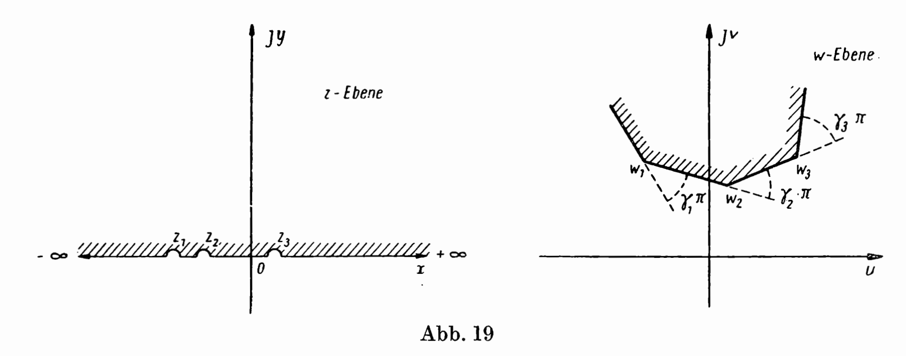


Abb. 19

Dem unendlich fernen Punkt der reellen Achse in der z-Ebene entspricht eine Ecke auf der w-Ebene, wenn für die Winkel gilt:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \neq 2 .$$

Diesem Eckpunkt ist der Winkel

$$2 - \gamma_1 - \gamma_2 - \cdots - \gamma_n$$

zugeordnet. Ist dieser Winkel größer oder gleich eins und positiv, dann liegt der Punkt im Unendlichen. Zum Wert eins gehören parallele Polygonseiten und zu einem größeren Wert divergierende Geraden (ausführliche Besprechung und Beweis siehe Literaturverzeichnis L [12]).

Die angegebene Integration führt bereits in verhältnismäßig einfachen Fällen, z. B. bei 3 oder 4 rechteckigen Brechungen, zu elliptischen Integralen. Bei mehr als 4 rechteckigen Brechungen, wie sie oft in der Praxis vorkommen, ergeben sich hyperelliptische Integrale. Man behilft sich in diesen Fällen mit Näherungspolynomen.

Zusammenfassung

Es soll das Flußbild eines Feldstückes berechnet werden, das sich zwischen zwei zusammenhängenden vieleckigen Grenzlinien befindet. Längs der Grenzlinien hat das magnetische Potential verschiedene, jedoch konstante Werte.

Die LAPLACEsche Potentialgleichung wird von beiden Komponenten jeder komplexen analytischen Funktion befriedigt. Die Aufgabe ist daher gelöst, wenn es gelingt, das auf die komplexe z-Ebene gezeichnete Feldstück auf den Parallelstreifen einer andern komplexen Ebene, z. B. $w = V + j\Phi$ abzubilden. Auch die beiden Komponenten von w befriedigen die LAPLACEsche Gleichung. Ihr Realteil kennzeichnet das magnetische Potential und ihr Imaginärteil die Flußlinien. Auf Grund der Abbildungsfunktion entsprechen den Geraden $V = \text{const}$ die Linien des konstanten Potentials und den Linien $\Phi = \text{const}$

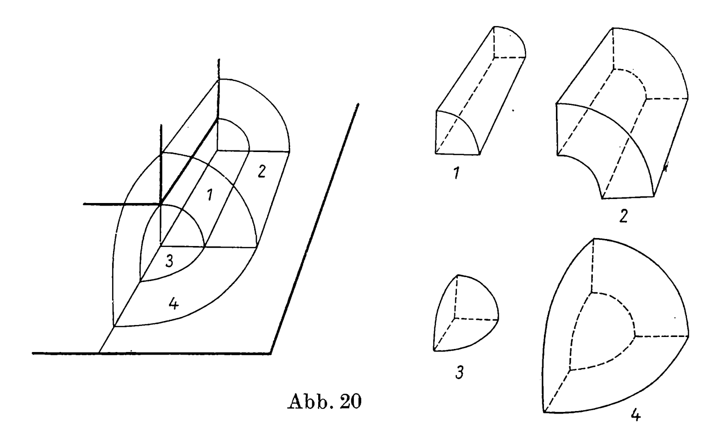


Abb. 20

die Linien des konstanten Flusses, also die Induktionslinien. Den beiden Grenzlinien des Streifens $V = \text{const}$ entsprechen die beiden Grenzlinien des Vielecks.

Die Abbildung kann nicht immer in einem Schritt durchgeführt werden. Oft ist das nur möglich mit Hilfe einer dazwischengelegten komplexen Hilfsebene. Mit der SCHWARZschen Transformation kann einerseits das vom Vieleck begrenzte Feldstück und andererseits der Parallelstreifen auf die obere Hälfte der Hilfsebene abgebildet werden. Durch Beseitigung der Veränderlichen der Hilfsebene ergibt sich dann die gesuchte Abbildungsfunktion (Abb. 83).

(22.) Zerlegung der Flußbilder

(Beispiele 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23b)

Das reale Flußbild in Luft wird in Flußröhren von einfacher geometrischer Form zerlegt, deren Leitfähigkeit leicht zu berechnen ist. Dabei sollen die Flußröhren bereits eine gute Näherung des wirklichen Kraftlinienbildes sein.

Die Zerlegung ist besonders bei räumlichen Flußbildern vorteilhaft, deren Berechnung sehr kompliziert ist, z. B. bei der Bestimmung der Leitfähigkeit von räumlicher Streuung.

Die Methode führt zu einfachen Formeln und zu einem für die Praxis befriedigenden Resultat, wenn sie mit der notwendigen Vorsicht angewendet

wird. Voraussetzung ist, daß die wahrscheinliche Verteilung der Flußlinien auf Grund entsprechender theoretischer Kenntnisse und Erfahrungen gut abgeschätzt werden kann. In einfachen Fällen ist der Verlauf der Kraftlinien ohne weiteres festzulegen.

Die Zerlegung eines Flußbildes in einfachere Elemente ist in Abb. 20 gezeigt. Gegenüber einer ebenen Eisenfläche von unendlicher Ausdehnung befindet sich ein quadratisches Eisenprisma. Der Streufluß, also der Fluß, der nicht zwischen der Verlängerung der Seiten des Prismas und der Ebene verläuft, wird in die Teilflüsse $1 \cdots 4$ zerlegt. Dann wird die Leitfähigkeit jeder dieser einfachen Formen für sich berechnet. Die einzelnen Wege der Teilflüsse sind parallelgeschaltet, so daß sich ihre Leitwerte addieren. Indem so aus den Teilen des Feldes ein magnetischer Kreis oder der Abschnitt eines magnetischen Kreises gebildet wurde, gehört die Berechnung nach der Zerlegung bereits zur Berechnung magnetischer Kreise.

b) Näherungsrechnung (Beispiel 23)

Die Näherungsrechnung eignet sich zur gut angenäherten Aufzeichnung des Flußbildes im strom- und eisenfreien Teil des Magnetfeldes. Sie stellt einen Mittelweg zwischen der behandelten Methode der konformen Abbildung und den graphischen Methoden des folgenden Abschnittes dar.

Vergleich der mathematischen und graphischen Methoden

Die Aufzeichnung eines magnetischen Kraftlinienbildes in Luft ist gleichbedeutend mit der Lösung der LAPLACEschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Die Werte des Potentials V an der Grenze des betrachteten Feldstückes sind aus der Problemstellung bekannt (Eisen, Strombelag usw.). Die Aufgabe besteht in der Bestimmung der Verteilung innerhalb dieser Grenzen. Die Lösung ergibt die Niveaulinien $V = \text{const.}$ Hierzu stehen die Kraftlinien überall senkrecht.

Es gibt hierfür drei Lösungsverfahren.

1. Die Methode der konformen Abbildung. Dieses Verfahren bringt genauere Resultate als die Näherungsrechnung, erfordert aber mathematische Vorkenntnisse und bedingt umständliche und langwierige mathematische Berechnungen. Man kann zudem nur in einfacheren Fällen eine geeignete Abbildungsfunktion finden. Das gleiche gilt für die Lösung mit FOURIER-Reihen.
2. Das graphische Verfahren führt verhältnismäßig rasch zum Ziel und ist einfach. Man muß jedoch Gefühl für die Lösung haben und darf wegen des Näherungscharakters kein strenges Resultat erwarten.
3. Die Näherungsrechnung und ihre systematische Durchführung, die „Methode der Reste", erfordert mehr Arbeit als die graphische Konstruktion.

Sie führt jedoch innerhalb der Näherungsgrenzen zu einem zuverlässigen Ergebnis. Zur Durchführung sind nur einfache theoretische Kenntnisse und einfache Berechnungen erforderlich.

(23.) Das Prinzip der Näherungsrechnung (Abb. 21)

Man zeichnet in dem zu untersuchenden Feldabschnitt ein Netz aus kleinen Quadraten mit der Seitenlänge a. Wird a so klein gewählt, daß die Potenzen von a über dem Quadrat vernachlässigbar klein sind, geht die LAPLACEsche Differentialgleichung in folgende Differenzengleichung über[24]:

$$V_P + V_Q + V_R + V_S - 4\,V_0 = 0. \tag{2.19}$$

Dies bedeutet, daß das Potential jedes Netzpunktes das Mittel des Potentials der benachbarten Punkte ist. Befriedigen alle Potentialwerte der einzelnen Knotenpunkte diese Bedingung, so ist die hierdurch gegebene Potentialverteilung eine Näherungslösung der LAPLACEschen Gleichung, die das Feld beschreibt.

(24.) Durchführung der Näherungsrechnung

Zuerst werden Niveaulinien entsprechend den Richtlinien der bei der graphischen Konstruktion zu erörternden Prinzipien nach Gefühl aufgezeichnet. Den Schnittpunkten des Netzes werden entsprechende Potentialwerte zugeschrieben.

Diese Zahlenwerte werden nicht überall die Differenzengleichung befriedigen. Das Verfahren besteht nun im wesentlichen darin, daß man von einem zweckmäßigerweise in der Ecke befindlichen Punkte ausgehend die Werte so lange korrigiert, bis die Bedingung erfüllt ist, daß das Potential eines jeden Punktes gleich dem Mittelwert der benachbarten ist. Bei der Berichtigung der Werte ist eine kleine Überkorrektur zweckmäßig, da dann die Konvergenz schneller ist[25]. Eine drei- bis viermalige Umrechnung der Zahlenwerte führt in der Praxis zu befriedigenden Ergebnissen.

Das Verfahren kann mit der sogenannten „Methode der Reste“ systematisch durchgeführt werden, die von der Tatsache ausgeht, daß jedem Punkt, der der LAPLACEschen Gleichung nicht entspricht, durch die Differenzendarstellung der POISSONschen Gleichung

$$V_P + V_R + V_Q + V_S - 4\,V_0 = m \tag{2.20}$$

eine Rest-Polstärke der Größe m zugeordnet ist.

Als Beispiel wird das Gebilde in Abb. 22 behandelt. Nach den Grenzbedingungen sei das Potential der Linie I 100, das der Linie II Null. Als erste Näherung wird angenommen, daß die Punkte in der Mitte diese Differenz überall halbieren.

Die Prüfung dieser Verteilung ergibt, daß die Potentialgleichung überall erfüllt ist, außer an den Stellen, an denen eine Brechung auftritt. Dort ist eine Restladung vorhanden von

$$50 + 50 + 0 + 0 - 4 \cdot 50 = -100.$$

Wird von der Polstärke des Punktes ein Viertel, also 25, abgezogen, dann ist das Gleichgewicht wiederhergestellt. Dadurch erscheint jedoch in den Punkten oberhalb und links ein Rest von

$$100 + 50 + 0 + 25 - 4 \cdot 50 = -25 .$$

Diese Reste werden wieder um etwa ein Viertel, also 6, vermindert. Dann ist das Gleichgewicht fast hergestellt. In den folgenden zwei Punkten bleibt jedoch eine Polstärke von je -6 und im Ausgangspunkt von -12.

Beim nächsten Schritt werden von dem Punkt mit dem Rest -12 mit einer Überkorrektur 4 abgezogen, so daß eine Polstärke von $+4$ verbleibt.

Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis jeder Rest verschwindet.

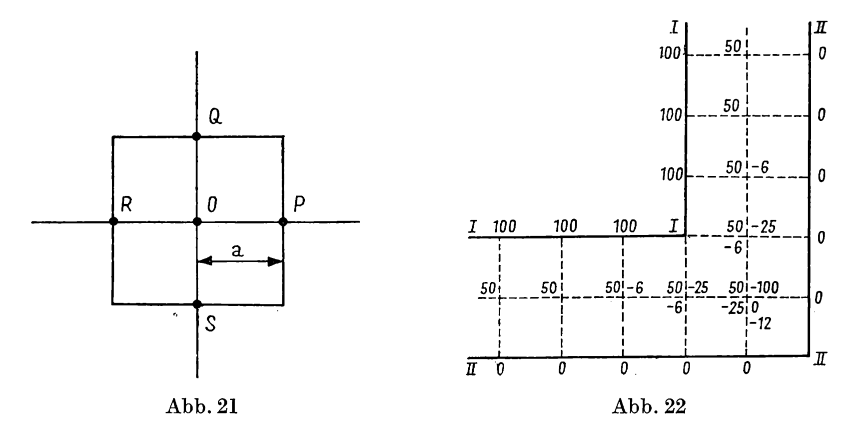


Abb. 21 Abb. 22

Bei der praktischen Anwendung ist es zweckmäßig, den Korrekturwert unter den Wert des Knotenpunktes in eine Kolonne und den jeweiligen Rest weiter rechts in eine andere Kolonne zu schreiben. Der Rechenvorgang kann rein mechanisch durchgeführt werden. Der abzuziehende Wert erscheint auf Grund der Gleichung als Rest in den benachbarten Knotenpunkten. Dagegen vermindert sich der Rest im jeweiligen Knotenpunkt um den vierfachen Wert. Es wird immer der ganze Wert des Restes aufgeschrieben, so daß der augenblickliche Zustand stets festgelegt ist. Ein etwaiger Fehler ist leicht zu erkennen, da die Lage der Reste dauernd kontrolliert werden kann. Das jeweilige Potential eines Punktes ist die algebraische Summe des ursprünglich angenommenen Wertes und des letzten Zahlenwertes, des Restes also, in der Kolonne.

Durch Übung und Einfühlungsvermögen läßt sich verhältnismäßig rasch ein Ergebnis erreichen.

(25.) Das Netz

Mit Hilfe eines dichteren Netzes ergibt sich ein genaueres Bild. Allerdings ist hierzu eine größere Arbeit erforderlich. Man wird deshalb das gröbere Netz

dort verfeinern, wo die Niveaulinien dichter sind, also besonders in der Nähe von scharfen Kanten und Ecken.

An der Grenze der beiden Netze werden die Werte der neuen Knotenpunkte des feineren Netzes durch Interpolation bestimmt. Mit diesen neuen Werten wird dann die Verteilung innerhalb des feinen Netzes berechnet. Dadurch ergeben sich in den Punkten des gröberen Netzes Änderungen, die an den inneren Knotenpunkten berichtigt werden müssen. Man muß dann die Berechnung des feineren Netzes aus der Interpolation der korrigierten groben Punkte noch einmal vornehmen.

Das bisher Gesagte gilt für Netze, die sich in einem Feldabschnitt zwischen Geraden befinden und die selbst aus Quadraten zusammengesetzt sind.

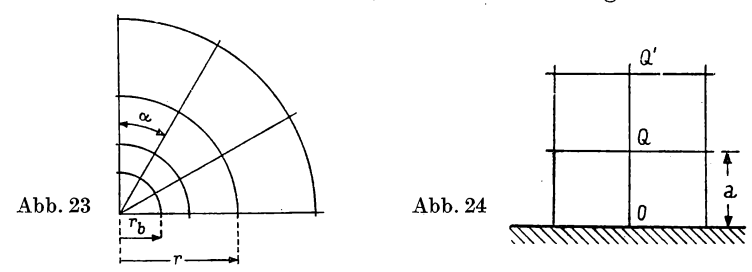


Abb. 23 Abb. 24

Besteht das Netz aus rechtwinkligen, aber nicht gleichseitigen Vierecken, dann lautet die Differenzengleichung

$$\frac{1}{a_P + a_R}\left(\frac{V_R - V_0}{a_R} + \frac{V_P - V_0}{a_P}\right) + \frac{1}{a_R + a_s}\left(\frac{V_s - V_0}{a_s} + \frac{V_Q - V_0}{a_Q}\right) = 0. \tag{2.19a}$$

Besteht das Netz nicht aus Geraden, sondern aus konzentrischen Kreisbögen und von den zu diesen gezogenen Radien, führt man zweckmäßigerweise die Polarkoordinaten $\vartheta = y$ und $r = k e^x$ ein[26].

Hierbei gibt es zwei Lösungswege. Entweder wird das Polarkoordinatennetz in rechtwinklige Koordinaten überführt und dann das in der vorerwähnten Weise erhaltene Ergebnis zurücktransformiert, oder das Verfahren wird unmittelbar auf Polarkoordinaten angewandt.

Im zweiten Fall wird der Feldabschnitt in Kreissektoren mit Winkeln von gleichem Bogenmaß α aufgeteilt[27]. Dann werden hierzu Kreisbögen mit den Radien $r = r_b e^{k\lambda}$ gezeichnet. Hierin sind $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$ und r_b der Halbmesser des inneren begrenzenden Kreisbogens (Abb. 23).

Ist die Grenzlinie eine unregelmäßige Kurve, kann sie durch eine fein gebrochene Stufenlinie eines engen Netzes angenähert werden.

(26.) Auswertung

Sind alle Werte an den Knotenpunkten richtig bestimmt, dann werden zwischen ihnen Punkte mit gleichen Potentialen durch Interpolation ermittelt[28]. Die Kurven durch diese Interpolationspunkte sind dann die gesuchten Äquipotentiallinien.

Die Verteilung der Induktion längs einer Grenzfläche kann aus den Potentialwerten der Netzpunkte unmittelbar berechnet werden:

Näherungsweise gilt

$$B = \mu_0 \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 \approx \mu_0 \frac{V_Q - V_0}{a}.$$

Hierin ist V_0 das Potential auf der Oberfläche und V_Q das des folgenden Netzpunktes (Abb. 24).

Eine bessere Näherung ist[29]

$$B = \mu_0 \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 \approx \mu_0 \frac{4\,V_Q - 3\,V_0 - V_{Q'}}{2a},$$

worin $V_{Q'}$ das Potential des nach V_Q senkrecht folgenden Punktes ist. An den Grenzflächen kann die Sättigung des Eisens ebenfalls in Betracht gezogen werden.

c) Graphische Lösung

Die graphischen Verfahren stellen im wesentlichen eine Folge von Lösungsversuchen der LAPLACEschen bzw. der POISSONschen Differentialgleichung dar. Die Induktionslinien werden zunächst gefühlsmäßig aufgezeichnet. Diese Darstellung wird nach und nach verbessert, bis sie die Differentialgleichungen und am Rande des Eisens die Brechungsgesetze erfüllt. Die Lösung ist dann richtig, wenn die Äquipotentiallinien in der Luft und die sogenannten arbeitsfreien Linien im Kupfer überall senkrecht zu den Kraftlinien verlaufen. Die Verhältnisse an den Grenzflächen werden später noch eingehend behandelt.

Wird das Feld von verschiedenen Durchflutungen erzeugt, ist es zweckmäßig, die Flußbilder einzeln zu zeichnen und zu superponieren. In diesem Falle wird die Eisensättigung vernachlässigt.

α) Graphische Lösung in Luft

(27.) Methode von LEHMANN und RICHTER (Beispiele 23d, 22f, 32, 34)

Die Permeabilität des Eisens wird als unendlich angenommen[30]. Die Kraftlinien treten dann an den Stellen ohne Wicklung senkrecht in das Eisen ein. Die Eisenfläche ist eine Niveaufläche. Zwischen den Eisenflächen werden einige Äquipotentiallinien nach Gutdünken angenommen. Dazu senkrecht werden so viele Kraftlinien gezeichnet, daß ihre mittlere Entfernung gleich der der Niveaulinien ist. Das Netz wird dann durch weitere Linien bei Einhaltung der Gleichheit der mittleren Entfernungen verfeinert.

Dieses Verfahren von LEHMANN und seine nachfolgende Auswertung beruht auf folgenden Überlegungen. Das Flußbild, das aufgezeichnet werden soll, besteht aus den Induktionslinien. Die Aufzeichnung und die Auswertung wird erleichtert, wenn außer den Induktionslinien auch die Niveaulinien eingezeichnet werden. Diese müssen die Induktionslinien senkrecht schneiden. Die Linienscharen beschreiben das magnetische Feld dann richtig, wenn je zwei benachbarte Niveaulinien den gleichen magnetischen Spannungsunter-

schied besitzen und wenn der Fluß zwischen je zwei benachbarten Flußlinien gleich groß ist. Die beiden Linienscharen unterteilen das Feld in rechtwinklige vierseitige Kurven. Es ist nicht notwendig, aber zweckmäßig, die Abstände der Niveaulinien, gemessen in der Mitte zwischen den Winkeln, gleich den mittleren Abständen der Induktionslinien zu wählen. In Abb. 25 sind zwei Äquipotentiallinien und zwei nahe beieinanderliegende Induktionslinien gezeichnet. Ist die Induktion im betrachteten Feldabschnitt konstant gleich B, dann ist der Induktionsfluß durch die Fläche $\Delta y \cdot d$ zwischen den beiden Induktionslinien (d ist die senkrecht zur Zeichenebene vorhandene Tiefe)

$$\Delta \Phi = B \cdot \Delta y \cdot d = \mu_0 H \cdot \Delta y \cdot d.$$

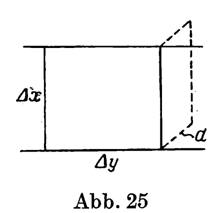


Abb. 25

Der magnetische Spannungsunterschied zwischen den beiden Niveaulinien ist

$$\Delta U_m = H \cdot \Delta x.$$

Daraus folgt

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta U_m} = \mu_0 \cdot d \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Wählt man in der Zeichnung gleiche mittlere Abstände

$$\Delta y = \Delta x,$$

so wird der Fluß zwischen zwei benachbarten Induktionslinien

$$\Delta \Phi = \mu_0 \cdot \Delta U_m \cdot d.$$

Als Tiefe d pflegt man die Einheit zu wählen.

Diese Feldbilder, bei denen die mittleren Abstände der Niveau- und Flußlinien in jedem Kurvenviereck jeweils gleich sind und sich senkrecht schneiden, sollen „krummlinige Quadrate" genannt werden (Beispiele 22f., 23d, 32). Der große Vorteil dieser Methode besteht darin, daß die Richtigkeit der Zeichnung rasch und leicht nachgeprüft und gegebenenfalls nach Augenmaß korrigiert werden kann. Die Richtigkeit der Quadrate kann man nachprüfen, indem man sie durch Halbierung der Seiten in vier Teile teilt. Bei guter Darstellung ergeben sich immer bessere Quadrate. Wichtig ist vor allem, daß sich die Fluß- und Niveaulinien überall senkrecht schneiden.

Die Auswertung der Zeichnung ist bei dieser Methode leicht, sicher und schnell durchgeführt.

Der magnetische Widerstand eines krummlinigen Quadrates ist

$$R_m = \frac{\Delta U_m}{\Delta \Phi} = \frac{1}{\mu_0 d}.$$

Teilen die Niveauflächen die Flußröhre in n-Quadrate (Abb. 26), dann ist der Widerstand der Röhre mit der Breite β

$$R_m = \frac{n}{\mu_0 d}.$$

Liegt zwischen den Flächen 1 und 2 eine magnetische Spannungsdifferenz U_m, dann ist der in der Röhre verlaufende Fluß

$$\Phi = \frac{U_m}{R_m} = \frac{\mu_0 \cdot d \cdot U_m}{n}.$$

Die mittlere Induktion der Röhre[31] beträgt

$$B = \frac{\Phi}{F} = \frac{\Phi}{d \cdot \beta} = \frac{\mu_0 U_m}{n \cdot \beta}.$$

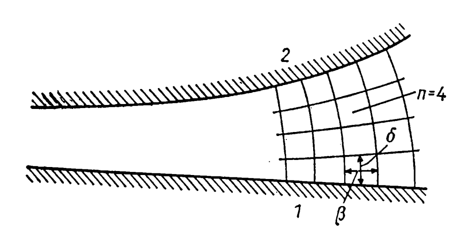


Abb. 26

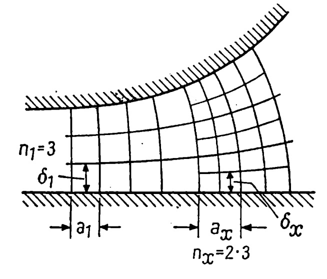


Abb. 27

Wenn m Röhren in die Fläche münden, ist der in einen größeren Teil der Eisenfläche eintretende Fluß

$$\Phi_F = m\Phi = m\,\frac{\mu_0 \cdot d \cdot U_m}{n}.$$

Da meist nicht der Absolutwert, sondern nur die relative Verteilung der Induktion gesucht wird, ist diese also leicht durch Ausmessen und Abzählen der Röhren und Quadrate aus dem Kraftlinienbild zu bestimmen:

1. Da jede Röhre die gleiche Flußdichte aufweist, steht der Induktionswert im umgekehrten Verhältnis zur Breite a der dort mündenden Flußröhre:

$$B_x \approx B_1 \frac{a_1}{a_x}.$$

2. Die Länge der Röhre ist leichter zu messen als ihre Breite. Da die magnetische Spannungsdifferenz U_m zwischen zwei Niveauflächen überall gleich ist, ergibt sich bei genügend feiner Unterteilung (Abb. 27)

$$B_x \approx B_1 \frac{n_1}{n_x} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_x};$$

denn die mittlere Induktion über dem Querschnitt einer jeden Röhre ist

$$B_{xk} = \frac{\Phi_x}{F_{xk}} = \frac{U_m}{R_{mx}} \cdot \frac{1}{F_{xk}} = \frac{U_m}{\dfrac{s_x}{\mu_0 F_{xk}}} \frac{1}{F_{xk}} = \frac{U_m \mu_0}{s_x} = \frac{U_m \mu_0}{n_x \delta_x}.$$

Dabei bedeutet F_{xk} den mittleren Querschnitt einer Flußröhre. Dieser ist bei genügend feiner Unterteilung längs der ganzen Röhre mit guter Annäherung konstant. Die Induktion ist dann an der Stelle der Mündung der Röhre gleich dem mittleren Wert

$$B \approx B_{xk}.$$

Damit kann die Induktionsverteilung längs der Eisenfläche berechnet werden.

Das Netzlinienbild mit krummlinigen Quadraten ist also durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

1. Die magnetische Spannungsdifferenz ist über jedem Quadrat gleich groß.
2. Der Fluß ist in jedem Quadrat gleich groß.
3. Induktion und Feldstärke stehen in umgekehrtem Verhältnis zur Größe des Quadrates.

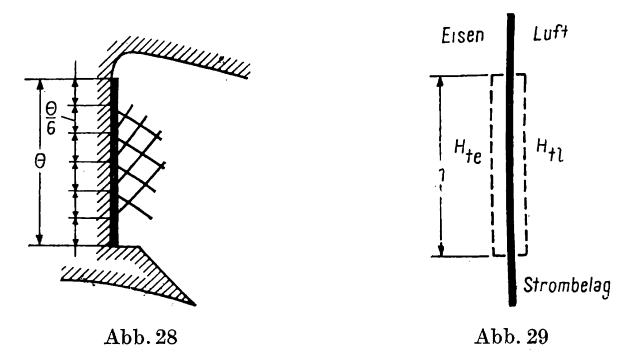


Abb. 28 Abb. 29

Berücksichtigung des Strombelages. In jedem Quadrat ist die gleiche magnetische Energie aufgespeichert. Die Durchflutung, die die magnetische Spannung erzeugt, befindet sich in Form von Wicklungen auf der Eisenfläche. Das Feld ist wegen des in der Wicklung fließenden Stromes nicht mehr wirbelfrei. Man pflegt daher die Wicklung durch einen auf der Eisenfläche gleichmäßig verteilten, unendlich dünnen Strombelag zu ersetzen (Abb. 28). Dadurch wird das Feld wieder wirbelfrei. Die mit Strom belegten Teile der Eisenfläche sind jedoch jetzt keine Niveauflächen mehr, da sich das Potential entlang dieser Flächen entsprechend dem Strombelag ändert. Bei gleichmäßiger Stromverteilung wächst das Potential linear. Wählt man gleiche Sprünge, dann verlaufen die Äquipotentiallinien in gleichen Abständen. Die vom Anfang und Ende des Belages ausgehenden Niveaulinien stimmen mit den Eisenkonturen überein.

Die Kraftlinien treten nicht mehr senkrecht aus dem Eisen heraus, da die Tangentialkomponente der Feldstärke wegen der Erregung auf der Oberfläche springt. Bedeutet A den Strombelag der Einheitslänge, so gilt nach dem Durchflutungsgesetz für den gezeichneten Weg in Abb. 29[32]

$$H_{te} - H_{tl} = A.$$

Es ist $B_{te} = \mu_0 H_{tl}$. Die Normalkomponente der Induktion bleibt unverändert

$$B_{nl} = B_{ne} = \mu_0 H_{nl}.$$

Auch die Induktionslinien treten nicht senkrecht in das Eisen ein, da sie die Niveaulinien unter einem rechten Winkel schneiden müssen (Abb. 28). In diesem Fall ergeben sich keine Quadrate.

Beim graphischen Verfahren wird deshalb zuerst der Eintrittswinkel der Niveaulinien geschätzt und das Bild gezeichnet. Die Normalkomponente kann dann, wie früher die Tangentialkomponente, nach $H_{tl} \approx H_{te} - A$ berechnet werden. Das ist möglich, weil die Tangentialkomponente im Eisen in guter Näherung gleich Null gesetzt werden kann. Aus beiden Komponenten ergibt sich der Neigungswinkel, mit dem das Kraftlinienbild neu gezeichnet wird. Bereits dieser zweite Versuch führt in den meisten Fällen zu einem befriedigenden Ergebnis.

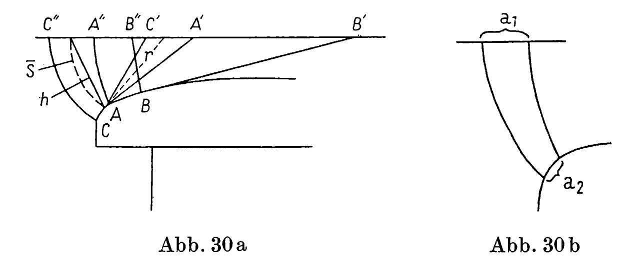


Abb. 30a Abb. 30b

Zur Prüfung des Flußbildes dient die ARNOLDsche Regel. Danach ist das beste Kraftlinienbild dasjenige mit dem kleinsten magnetischen Widerstand.

Bei der Behandlung des Beispiels 34 werden die Zeichnungsregeln noch einmal zusammengefaßt.

(28.) Methode von UNGER (Beispiel 35)

F. UNGER gab ein Verfahren an, bei dem die Kraftlinien zwischen zwei Eisenflächen durch Kreisbögen angenähert werden. Da die Kraftlinien senkrecht in die beiden Eisenflächen eindringen, ergibt sich folgende Konstruktion:

Von der Polfläche einer Synchronmaschine (Abb. 30a) geht vom Punkt A ein Kreisbogen aus, der die Ankerfläche in A'' schneidet. Im Mittelpunkt A' des zugehörigen Kreises schneidet die Tangente an A die Ankerfläche. In gleicher Weise sind die Kraftlinien B–B'' und C–C'' konstruiert. Sie sollen so nahe beieinander gewählt werden, daß nicht nur $AB = AC$, sondern auch $A''B'' = A''C''$ werden.

Wenn der Querschnitt der Kraftlinienröhren auf seiner ganzen Länge konstant ist, steht die Induktion längs einer Geraden, also z. B. entlang des Ankers, in umgekehrtem Verhältnis zur Länge der dort mündenden Kraftlinienröhre [vgl. (27.)]. In diesem Beispiel haben die Flußröhren keinen konstanten Querschnitt. Man muß daher statt mit der mittleren Länge $\bar{s}$ der

wirklichen Röhre mit der mittleren Länge s' einer parallelwandigen Ersatzkraftröhre mit der Breite a_1 rechnen, die die gleiche Leitfähigkeit wie die tatsächliche Kraftröhre besitzt. UNGER zeigte (Lit. T [1]), daß das Verhältnis $k_1 = \frac{s'}{\bar{s}}$ in guter Näherung als Funktion von a_1/a_2 ausgedrückt werden kann (Abb. 30b), so daß aus der mittleren Länge der wirklichen Kraftlinienröhre die Länge der Ersatzröhre mit Hilfe eines Diagrammes auf Grund der Relation $s' = k_1 \cdot \bar{s}$ errechnet werden kann.

Da die mittlere Länge der tatsächlichen Kraftlinienröhre unbequem auszumessen ist, stellte UNGER ein Funktionsdiagramm auf, aus dem man bei Kenntnis des Verhältnisses zwischen dem Halbmesser r und der Sehne h das Verhältnis von $\bar{s}$ zu h ablesen kann. Bezeichnet man den Quotienten $\frac{\bar{s}}{h}$ mit k_2, so ergibt sich mit dem aus dem Diagramm abgelesenen Wert von k_2

$$\bar{s} = k_2 \cdot h.$$

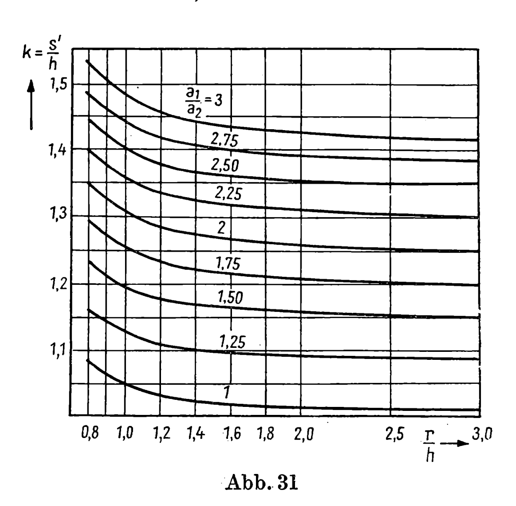


Abb. 31

Die beiden Kurven können zu einer Kurvenschar vereinigt werden (Abb. 31). Hieraus kann bei Kenntnis von r/h und a_1/a_2 der Faktor $k = k_1 \cdot k_2$ gewonnen werden. Die mittlere Länge der Ersatz-Kraftlinienröhre ist somit

$$s' = kh.$$

Zur Bestimmung der Induktionsverteilung in der Ebene verfährt man dementsprechend folgendermaßen:

Die gekrümmte Polfläche wird in beliebig viele Teile geteilt, wobei man zweckmäßig die Punkte im Bereich größerer Krümmung dichter wählt. Dann werden in der beschriebenen Weise Kreisbögen aus den Teilpunkten gezeichnet. Die Gerade, die die Mittelpunkte der Strecken a_1 und a_2 verbindet (Abb. 30b), ist die Sehne h der mittleren Länge der Kraftlinien. Ihre Mittelsenkrechte schneidet den Mittelpunkt des Kreises der mittleren Kraftlinie auf der Ankerebene. Der Radius r kann also gemessen werden. Bei Kenntnis der Verhältnisse r/h und a_1/a_2 (man kann r, h, a_1 und a_2 bequem abmessen) wird aus der Kurvenschar der Wert von k entnommen. Die mittlere Länge der gleichwertigen Ersatz-Kraftlinienröhre ist $s'_x = k_x \cdot h_x$. Damit ist das Verhältnis der Induktionen an zwei Stellen gefunden:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{s'_2}{s'_1}.$$

Wählt man B_2 zu 100% und bezieht die Induktion der übrigen Punkte hierauf, dann kann die Verteilung der Induktion längs der Ankerebene nach folgender Beziehung aus der Zeichnung bestimmt werden:

$$B(\%) = 100 \cdot \frac{s_2'}{s_1'} .$$

Dieses Verfahren wird zur Aufzeichnung der Induktionsverteilung im Luftspalt von Schenkelpol-Synchronmaschinen verwendet. Dabei ist es zweckmäßig, die Induktionen auf die Flußdichte der Polmitte zu beziehen.

(29.) Schematisches Flußbild (Beispiele 30, 31)

In vielen Fällen ist ein genaues Netz für die Auswertung nicht erforderlich. Oft genügt ein gröberes qualitatives Kraftlinienbild, das den geometrischen Charakter der Verteilung zeigt. In solchen Fällen kann man sich mit wenigen Linien begnügen. Wegen der Brechung der Linien sollen jedoch die Grenzflächen der verschiedenen Materialien angegeben werden, ebenso die eventuellen Singularitätspunkte und die geometrischen Symmetrielinien. Die Kraftlinien müssen sowohl in der Nähe der Stromleiter als auch weiter weg davon entworfen werden. Die Fluß- und Niveaulinien müssen so gezeichnet werden, daß ihre Verteilung, also ihre Richtung und Entfernung, die Potentialverteilung des Feldes bzw. die Richtung und die Größe der Induktion an verschiedenen Stellen des Feldes richtig kennzeichnet. Dabei ist es, wie auch beim genauen Kraftlinienbild, zweckmäßig, diejenigen Kraft- bzw. Niveaulinien, die kleinere Zwischensprünge bedeuten, mit gestrichelten Linien oder andersfarbig zu zeichnen.

β) Graphische Lösung im Innern von stromführenden Leitern (Beispiele 36, 37)

Die Untersuchungen werden auf solche Fälle beschränkt, bei denen die Stromdichte im Querschnitt überall gleich ist. Das ist bei den folgenden Berechnungen angenommen.

(30.) Konstruktionsgrundsätze

Im Kupfer sind keine magnetischen Äquipotentiallinien vorhanden. Man kann jedoch zu den Kraftlinien überall senkrechte Linien, sogenannte „arbeitsfreie Linien“[33], ziehen. TH. LEHMANN hat bewiesen, daß sich diese Linien in einem Punkte, dem sogenannten Kern, treffen. An der Oberfläche des Kupfers gehen die arbeitsfreien Linien in Niveaulinien über.

Für die Bestimmung der Lage des Kerns kann keine genaue Anweisung gegeben werden. Seine Bestimmung wird jedoch durch allgemeine Regeln erleichtert. Dabei ist die Lage des Kernes von der Form des Leiters abhängig. Befinden sich in der Nähe des Leiters magnetische Stoffe oder andere stromführende Leiter, dann verschiebt sich seine Lage in Richtung der magnetischen Stoffe und der gleichgerichteten Ströme. Fließen die Ströme in entgegengesetzter Richtung, dann verschiebt sich die Lage des Kernes ebenfalls in die entgegengesetzte Richtung. Nach diesen Gesichtspunkten kann die

Lage des Kernes eingezeichnet und mit Hilfe nachstehender Konstruktionsprinzipien überprüft werden. Bei einfachen Gebilden kann die Lage des Kernes rechnerisch bestimmt werden.

Bei der Zeichnung des Flußbildes soll nach folgenden Regeln verfahren werden.

1. Kraftlinien und arbeitsfreie Linien schneiden sich überall senkrecht.
2. Die arbeitsfreien Linien treffen sich in einem Punkt, dem Kern.
3. Die als Verlängerung der Äquipotentiallinien in das Kupfer eindringenden arbeitsfreien Linien teilen den Querschnitt des Kupfers in gleiche Teile.
4. Der „magnetische Spannungsabfall" oder, genauer, die bei der Bewegung der Einheitsladung verrichtete Arbeit ist zwischen zwei Punkten einer Kraftlinie proportional dem Strom, der vom Kraftlinienstück und von den sich an seine Endpunkte anschließenden arbeitsfreien Linien umgeben ist.
5. Die Entfernung der Kraftlinien steht im umgekehrten Verhältnis zum umschlossenen Kupfer und in direktem Verhältnis zu der im Kupfer verlaufenden Länge der Kraftlinienröhre[34].
6. Zeichnet man zwischen zwei Potentiallinien außerhalb des Kupfers eine Niveaulinie mit halbem Potential und verlängert sie ins Kupfer hinein, dann werden die Kraftlinien nicht unbedingt in Teile von je halbem Spannungsabfall geteilt (Punkt 4).

Die Durchführung der Zeichnung wird an einem ausgearbeiteten Beispiel 37 gezeigt.

(31.) Prüfung der Ergebnisse[35]

1. Kraftlinien und arbeitsfreie Linien müssen sich überall senkrecht schneiden.
2. Die Induktionslinien müssen unter der Voraussetzung $\mu = \infty$ senkrecht in das Eisen eindringen.
3. Außerhalb des stromführenden Materials muß die mittlere Entfernung zwischen den Kraft- und den Niveaulinien gleich sein.
4. Im Kupfer ist das Verhältnis $\frac{s}{a}$ der Abstände der arbeitsfreien Linien (s) zu den Kraftlinienabständen (a) < 1. Die Verhältniszahl hängt davon ab, wie sich das von der Kraftlinie und den zwei dazugezogenen arbeitsfreien Linien umschlossene Kupfer zum gesamten, von den beiden arbeitsfreien Linien umschlossenen Kupfer verhält[36].

(32.) Verhältnisse im Eisen

Wenn die Permeabilität des Eisens auf der betrachteten Fläche als konstant angenommen werden kann oder wenn sie sich nicht in der zu den Feldlinien senkrechten Richtung ändert, gelten für die Zeichnung des Flußbildes im Eisen dieselben Regeln wie in Luft. Jedoch darf die Grenzlinie Eisen-Luft, vom Eisen aus betrachtet, nicht als Äquipotentialfläche angesehen werden.

Die Methode von LEHMANN ist auch anwendbar, wenn die Permeabilität im Eisen nicht konstant ist, sondern sich nach jeder Richtung ändert (Lit. F[3]).

(33.) Die Spiegelungsmethode (Beispiele 33, 38)

Mit der Methode der Spiegelung können gewisse Aufgaben auf solche mit bekannter Lösung zurückgeführt werden. Dazu wird das aus Leitern und Materialien verschiedener Permeabilität bestehende System durch eine substituierende Anordnung ersetzt. Dabei ist erforderlich, daß die beiden Gebilde wenigstens eine gleichförmige, gemeinsame Äquipotentialfläche besitzen.

Bei magnetischen Aufgaben ist die Zeichnung der Kraftlinien von solchen Stromleitern durchzuführen, die sich in einem von Eisen und Luft ausgefüllten Raum befinden. Das Verfahren besteht im wesentlichen darin, daß man das Kraftlinienbild in den einzelnen Medien bestimmt. Dabei wird das gesamte Volumen des Raumabschnittes mit diesem Medium ausgefüllt und der Einfluß des anderen Materials durch imaginäre spiegelbildliche Ströme ersetzt.

Das Wort Spiegelung darf nicht wörtlich verstanden werden. Nimmt man die Permeabilität des Eisens als unendlich groß an, dann ist seine Fläche eine Äquipotentialfläche, und der Leiter kann in der Luft nach Entfernung des Eisens durch ein symmetrisch liegendes und gleichgroßes Spiegelbild ergänzt werden (Beispiel 33).

Berücksichtigt man die endliche Permeabilität des Eisens, so besteht die Aufgabe darin, Stellung und Größe der imaginären spiegelbildlichen Leiter zu suchen. Die Lösung ist richtig, wenn sie an der Grenzfläche Eisen–Luft die Brechungsgesetze befriedigt (Beispiel 38). Aus den Beispielen lassen sich diese allgemeinen Regeln gut erkennen.

(34.) Experimentelle Untersuchung

Das Kraftlinienbild eines Magnetfeldes oder die Streuung eines magnetischen Kreises kann auch experimentell bestimmt werden. Derartige Methoden und Verfahren sollen jedoch in diesem Buch nicht erläutert werden.

Man kann das Kraftlinienbild durch Anwendung der im Magnetfeld beobachteten Kraft- bzw. Induktionswirkungen ermitteln, z. B. mit Eisenfeilspänen, oder auch am Modell eines anderen, leichter ermittelbaren Feldes ähnlicher Struktur. Hierzu wird ein Beispiel bei der Berechnung des Carterschen Faktors gezeigt. Dabei wird der Weg des Flusses durch elektrische Strömung ersetzt (Lit. W [2]).

Ein magnetisches Feld kann auch durch ein elektrisches Netzmodell ersetzt werden, das die das Feld beschreibende partielle Differentialgleichung erfüllt (Lit. W [3], W [4]).

(1) a) Schreibweise

Bei der rationalisierten Schreibweise erscheint im Nenner der Faktor 4π. Bei dieser von den Kraftwirkungen ausgehenden Behandlung wäre die nichtrationalisierte Schreibweise logischer, da dann der Faktor 4π in den Ausgangsgleichungen nicht erscheinen würde. Bei dem Kraftlinienbild ist jedoch die rationalisierte Form zweckmäßiger, weil dann die am meisten angewandten Gleichungen einfacher werden. So ist dann z.B. der dielektrische Fluß einer Ladung seinem Zahlenwert nach gleich der Ladung, also $Q = \psi$, statt in der nichtrationalisierten Form $\psi = 4\pi Q$.

b) Maßsysteme

Wegen des Vergleichs der verschiedenen Maßsysteme und der Wahl des richtigen Systems sei auf die Literatur verwiesen (Lit. B [10]). Hier soll nur ein kurzer Überblick gegeben werden.

Es ist zweckmäßig, die Maßsysteme auf Grund ihrer historischen Entwicklung zusammenzufassen. Aus dem CGS-System der Mechanik entwickelten sich zwei elektrische Maßsysteme. Die Begriffe der Mechanik wurden in der Elektrostatik bzw. Magnetostatik durch die neuen Begriffe der elektrischen Ladung und der Magnetpolstärke erweitert. In den COULOMBschen Gesetzen erscheint zwischen Kraft und Ladung bzw. zwischen Kraft und Polstärke je ein Faktor, dessen Wert von der Definition der Ladung bzw. der Polstärke abhängt. Im elektrostatischen CGS-System ist die Einheit die Dielektrizitätskonstante des Vakuums, im elektromagnetischen CGS-System die Permeabilität des Vakuums. Dabei sind beide Einheiten voneinander abhängig. Aus diesem Grunde tritt in der Kombination der beiden Systeme, im GAUSSschen Maßsystem, die Lichtgeschwindigkeit c als der beide Einheiten verbindende Faktor auf. Mehrere Einheiten des elektromagnetischen CGS-Systems haben sich für die praktische Elektrotechnik als unbequem erwiesen. Sie waren entweder zu groß oder zu klein. Aus diesem Grunde wurden im praktischen Maßsystem Vielfache oder Teilzahlen der Zehnerpotenzen dieser Einheiten, z.B. Coulomb, Ampere, Volt, Farad, Henry, als neue Einheiten eingeführt.

Das praktische Maßsystem hat den Nachteil, daß es kein absolutes System ist. Seine Einheiten können nicht von den Grundeinheiten Länge, Gewicht, Zeit und einer vierten Einheit abgeleitet werden. Dies ist vielmehr nur mög-

lich aus den Einheiten des elektromagnetischen CGS-Systems. Daher war dieses System nicht vollständig. Die fehlende Einheit, z. B. die Schwerkraftbeschleunigung, müßte aus anderen Systemen entnommen werden. Dadurch entstand eine gewisse Verwirrung.

Die Einheiten des praktischen Systems wurden in einer durch Messungen reproduzierbaren Form mit Normalien, z. B. Normalelement, Quecksilbersäule, Silber-Voltameter, festgelegt. Durch sehr genaue Messungen hat sich später ergeben, daß diese Normalien mit den definierten Einheiten nicht vollkommen übereinstimmen. Die den fehlerbehafteten Normalien entsprechenden Einheiten des technischen Maßsystems werden „internationale Einheiten" genannt und die aufs genaueste korrigierten „absolute Einheiten". Die Abweichungen sind sehr gering und für die Praxis ohne Bedeutung.

GIORGI wies nach, daß die Einheiten des technischen Maßsystems zu einem absoluten System ergänzt werden können, wenn als Grundeinheiten Meter, Kilogramm, Sekunde und als vierte Grundeinheit die Permeabilität des Vakuums oder eine diese bestimmende Größe, z. B. die Einheit der Stromstärke, gewählt wird. Dabei wird unter einem absoluten System ein System verstanden, das keine überflüssigen Multiplikationsfaktoren enthält. Man kann das GIORGIsche oder MKS-System, wobei die vierte Einheit nicht erwähnt wird, folgendermaßen kennzeichnen:

Es ist:

1. Ein von jedem anderen System unabhängiges absolutes System.
2. Seine elektrischen Einheiten sind mit den praktischen Einheiten identisch: V, A, Ω, C, F, H, W, I.
3. Die Einheit der Kraft ist das „Newton" (N) oder Großdyn (Dyn). Dieses verleiht einer Masse von 1 kg die Beschleunigung von 1 m/s². Die Leistungseinheit N · m/s ist mit der Einheit Watt identisch.
4. Die magnetischen Einheiten werden entsprechend den elektrischen und mechanischen Einheiten gewählt, damit zwischen zusammenhängenden Größen eine 1 : 1-Relation zustande kommt. Das technische Maßsystem wird folgerichtig auf die Kennwerte des magnetischen und elektrischen Feldes ausgedehnt. Hierdurch gelingt es, die bisherige Trennung der Einheiten der elektrischen und magnetischen Größen zu beseitigen.
5. Die Größengleichungen ergeben richtige Resultate, wenn mit MKS-Einheiten gerechnet wird.
6. ε_0 und μ_0 müssen entsprechend berücksichtigt werden. So sind z. B. Einheit und Zahlenwert der Induktion und der magnetischen Feldstärke auch im Vakuum verschieden.

Unter Rationalisieren wird die Operation verstanden, durch die der Faktor 4π aus bestimmten Gleichungen verschwindet und in anderen Gleichungen erscheint. Die rationalisierten Einheiten werden so gewählt, daß

einer elektrischen Ladungseinheit eine elektrische Flußeinheit, keine 4π mal größere, entströmt. Es ist also $\psi = Q$ und nicht $\psi = 4\pi Q$. Es soll auch die magnetische Umlaufspannung gleich dem umschlossenen Strom sein, also $\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \Theta$ und nicht $\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = 4\pi\Theta$. Dies bedeutet, daß im rationalisierten System der Faktor 4π aus all den Formeln verschwindet, die sich auf Flächenprobleme beziehen (z.B. Plattenkondensator).

Es ist üblich, die MKS-Einheiten zusammen mit der Rationalisierung zu behandeln, da das MKS-System die vollständige, absolute, einheitliche, logische und rationalisierte Festlegung der Einheiten ermöglicht. Betont sei, daß die Einführung des GIORGIschen Systems und die Frage der Rationalisierung grundsätzlich voneinander unabhängig sind, obwohl sie von GIORGI gleichzeitig vorgeschlagen wurden. Die Frage nach der Rationalisierung wurde früher schon aufgeworfen.

Von der Anwendung des GIORGIschen Systems wurde in Hinblick auf die Betriebspraxis in diesem Buch noch Abstand genommen. Seine Erörterung wurde aber für notwendig gehalten in der Hoffnung, daß dieses System recht bald allgemein eingeführt wird.

(2) V. P. HESSLER hat darauf aufmerksam gemacht, daß alle Zusammenhänge entweder experimentell gefunden, definiert, abgeleitet oder verallgemeinert sind.

Die Kenntnis des Ursprunges einer Beziehung ist sehr wichtig, da die experimentellen und definierten Formeln nur innerhalb der Grenzen jener Bedingungen angewendet werden dürfen, die den entsprechenden Messungen bzw. Definitionen zugrunde lagen und die Anwendung der abgeleiteten Formeln sowohl durch die experimentellen als auch die definierten Zusammenhänge, die als Grundlage zu ihrer Ermittlung dienten, beschränkt wird.

Als Verallgemeinerungen wollen wir solche Gesetze ansehen, die als allgemein gültig betrachtet werden, weil ihnen bisher keine experimentelle Tatsache widersprach.

(3) Im Nenner steht an Stelle von 4π der Wert 2π und r anstatt r^2. Diese Form kann aus der für Stromelemente gültigen Differentialformel durch Integration berechnet werden.

(4) Die Ausdrücke Feldstärkelinie, Induktionslinie, Kraftlinie, Flußlinie werden abwechselnd gebraucht. Die Bedeutung der ersten beiden ist eindeutig. In der Darstellung des magnetischen Feldes in Luft können jedoch die Linien sowohl Induktion als auch Feldstärke bedeuten. Dabei ist nur ein konstanter Multiplikationsfaktor vorhanden, der eine Maßstabänderung der Dichte der Linien bedeutet. In solchen Fällen wird mit dem Ausdruck Kraftlinie jeweils die entsprechende physikalische Tatsache bezeichnet. Flußlinie bedeutet im Text im allgemeinen Induktionslinie. Es kann damit aber auch in einem Feldabschnitt konstanter Permeabilität ein und dieselbe Abbildung die Feldstärkelinien kennzeichnen.

Die Ausdrücke „Kraftlinie“ und „Feldlinie“ dienen in erster Linie zur Unterscheidung von den Niveaulinien der Netze.

(5) Bei der späteren Berechnung magnetischer Felder wird die bequemere Relation rot $\mathfrak{A}' = \mathfrak{H}$ verwendet. Bei der gegebenen Aufgabe kann jeder der beiden Ausdrücke gebraucht werden, sofern man folgerichtig vorgeht.

(6) Die Additions- und Multiplikationsregeln für Vektoren werden als bekannt vorausgesetzt.

(7) Höheren Grades sind z. B. Dyaden und Tensoren.

(8) Der HAMILTONsche Operator ∇. Zur Untersuchung und Kennzeichnung von Vektorfeldern bedient man sich dreier wichtiger Begriffe. Diese sind mit Hilfe des Differentialoperators ∇ der Vektoranalysis zu erhalten, wenn ∇ mit einer skalaren bzw. vektoriellen Größe skalar oder vektoriell multipliziert wird. Wird der Operator ∇ im rechtwinkligen Koordinatensystem auf eine Größe angewandt, die eine Funktion von x, y und z ist, so gilt

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Im folgenden wird die physikalische Bedeutung der vorerwähnten drei Operationen erläutert.

n, C, B, $\varphi + d\varphi$, α, $d\mathfrak{r}$, φ, A, $\mathfrak{r}$, 0

Abb. 32

a) Der Gradient des Skalarfeldes

Zwei durch konstante Funktionswerte gekennzeichnete Flächen eines Skalarfeldes werden so nahe beieinanderliegend gewählt, daß sich beim Übergang von der einen zur anderen Fläche die skalare Größe φ in $\varphi + d\varphi$ ändert (Abb. 32). Beim Übergang vom Punkt A zum Punkt B ändert sich der aus dem Ursprungspunkt gezogene Radiusvektor $\mathfrak{r}$ um den Wert $d\mathfrak{r}$. In Richtung AB ist das Maß der Änderungsgeschwindigkeit gleich $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$. Die Änderung erreicht ihren Maximalwert, wenn der Übergang auf kürzestem Wege, also längs einer im Punkt A errichteten Senkrechten erfolgt. Das größte Anwachsen ist durch $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ gegeben. Die Richtung ist durch den im Punkt A errichteten normalen Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ gekennzeichnet. Diesen Vektor, der in jedem Punkte des Skalarfeldes das schnellste Anwachsen nach Richtung und Größe angibt, nennt man den Gradienten des Skalarfeldes. Es ist

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot \mathfrak{n}.$$

Die Operationen grad φ und $\nabla\varphi$ sind identisch. Bei rechtwinkligen Koordinaten ist nämlich

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathfrak{k}$$

und

$$d\mathfrak{r} = dx\mathfrak{i} + dy\mathfrak{j} + dz\mathfrak{k}.$$

Das skalare Produkt beider Größen ergibt

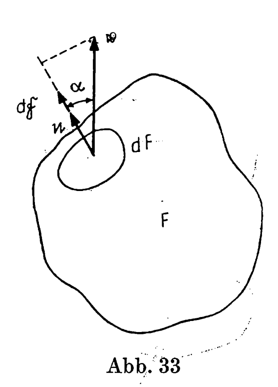


Abb. 33

$$\nabla\varphi \cdot d\mathfrak{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi.$$

Ebenso ist

$$\text{grad}\,\varphi \cdot d\mathfrak{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathfrak{n}\,d\mathfrak{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}dr \cdot \cos\alpha$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot dn = d\varphi,$$

gleich dem totalen Differential von φ. Es ist also

$$\nabla\varphi \cdot d\mathfrak{r} = \text{grad}\,\varphi \cdot d\mathfrak{r}.$$

Der Gradient und der Operator ∇ sind vom Koordinatensystem unabhängige Größen.

Beide Operationen, grad und ∇, ergeben bei Anwendung auf räumliche Skalarfunktionen, unabhängig vom Koordinatensystem, Wert und Richtung der größten Änderungsgeschwindigkeit an; oder anders ausgedrückt, sie stellen aus einem Skalarfeld ein Vektorfeld her.

b) Die Divergenz des Vektorfeldes

Ein Element dF einer im Vektorfeld abgebildeten Fläche (Abb. 33) kann durch einen Vektor in Richtung des normalen Einheitsvektors und von der Größe des Flächenelementes gekennzeichnet werden. Es ist dann

$$d\mathfrak{F} = \mathfrak{n}\cdot dF.$$

Das skalare Produkt aus dem im Mittelpunkt des Flächenelementes vorhandenen Vektors $\mathfrak{v}$ und $d\mathfrak{F}$ ist der Zahl der durch das Flächenelement $d\mathfrak{F}$ hindurchtretenden Flußlinien gleich, da $d\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{v} = dF\cdot|\mathfrak{v}|\cdot\cos\alpha$ ist und die Tangentialkomponente von $\mathfrak{v}$ zu dem die Fläche durchdringenden Fluß nichts beiträgt. Bildet man über die ganze Fläche $\mathfrak{F}$ die Summe dieser skalaren Produkte, so ist diese gleich dem durch die Fläche hindurchtretenden Gesamtfluß.

Bei einer geschlossenen Fläche ergibt diese Summe die Differenz der nach innen und außen tretenden Kraftlinien. Es ist dies die Zahl der von der Fläche ausgehenden Kraftlinien. Wird diese Zahl durch den Volumeninhalt V dividiert, ergeben sich die im Mittel aus der Volumeneinheit austretenden

Flußlinien. Der Grenzwert $V \to 0$ dieses Quotienten charakterisiert in jedem Punkt des Feldes die Anzahl der dort entspringenden Linien. Er wird Divergenz des Vektorfeldes genannt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_F \mathfrak{v}\, d\mathfrak{F}.$$

Die Divergenz ist ebenso wie der Fluß eine skalare Größe. Die Bildung der Divergenz und die Operation $\nabla \mathfrak{v}$ sind identisch.

Für rechtwinklige Koordinaten gilt

$$\nabla \mathfrak{v} = \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(v_x \mathfrak{i} + v_y \mathfrak{j} + v_z \mathfrak{k}\right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Hierbei sind v_x, v_y und v_z die Komponenten des Vektors $\mathfrak{v}$ in Richtung der Koordinatenachsen.

Ist in der Fläche $dy \cdot dz$ eines Elementarwürfels $dx\, dy\, dz$ die in der x-Richtung verlaufende Komponente des Vektors $\mathfrak{v}$ gleich v_x, dann hat sie an der gegenüberliegenden Fläche den Wert $v_x - \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx$. Die Differenz des an den beiden Flächen ein- bzw. austretenden Flusses (Abb. 34) ist dann

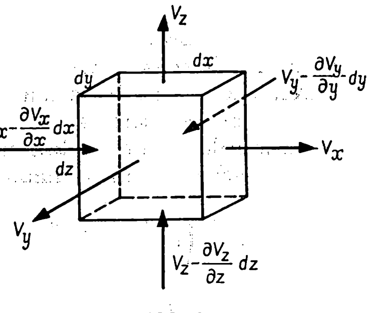


Abb. 34

$$v_x\, dy\, dx = \left(v_x - \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Überträgt man dieses Verfahren auf alle Seiten eines Würfels, dann ist der von einem Elementarwürfel ausgehende Gesamtfluß

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx \cdot dy \cdot dz.$$

Dividiert man durch den Volumeninhalt, ergibt sich

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{v} = \nabla \mathfrak{v}.$$

Daraus folgt, daß die Divergenz, also der in einem Raumelement entstehende oder verschwindende Fluß, ebenso wie die Operation $\nabla \mathfrak{v}$ entsprechend ihrem physikalischen Sinn, unabhängig vom Koordinatensystem sind.

c) Die Rotation des Vektorfeldes

Das skalare Produkt einer gerichteten Strecke $d\mathfrak{s}$ einer in ein Vektorfeld sich erstreckenden Kurve und des an der Stelle von $d\mathfrak{s}$ auftretenden Vektors $\mathfrak{v}$ ergibt das Produkt aus der in Richtung von $d\mathfrak{s}$ verlaufenden Komponente von $\mathfrak{v}$ und von $d\mathfrak{s}$. Die Summe dieser Produkte entlang einer Kurve ist das Linienintegral des Vektors.

Wählt man nun ein kleines ebenes Flächenstück im Vektorfeld und dreht es so lange, bis das über die begrenzende geschlossene Kurve gebildete Linienintegral seinen maximalen Wert erreicht, und dividiert dann durch die Fläche, so erhält man den auf die Flächeneinheit entfallenden Durchschnittswert des längs der geschlossenen Kurve verlaufenden größten Integrals. Im Grenzwert $dF \to 0$ erhält man den in einem Punkt gültigen Wert, der den absoluten Wert der Rotation darstellt. Dieser beträgt:

$$|\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}| = \lim_{dF\to 0} \frac{1}{dF} \oint \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s}.$$

Der Maximalwert des Linienintegrals ergibt sich bei einer Orientierung des Flächenelementes, die durch eine bestimmte Normale charakterisiert ist. Demnach ist die Rotation ein Vektor, dessen Richtung mit der der Normalen übereinstimmt.

Die Bildung der Rotation und die Operation $\nabla \times \mathfrak{v}$ sind identisch. Für kartesische Raumkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathfrak{v} &= \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(v_x\mathfrak{i} + v_y\mathfrak{j} + v_z\mathfrak{k}\right)\\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathfrak{k}\\ &= \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Bildet man das Integral des Vektors $\mathfrak{v}$ über die Kurve längs des Elementarrechtecks $dx\,dy$ in der Ebene x, y in der aus Abb. 35 ersichtlichen Kreisrichtung, so ist

$$\begin{aligned}\oint \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} &= v_x dx + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx\right) dy - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy\right) dx - v_y dy\\ &= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dx\, dy.\end{aligned}$$

Da $dx\,dy$ der Flächeninhalt des Elementarrechtecks ist, ist die Komponente der Rotation des Vektorfeldes in Richtung z

$$\text{rot}_z\,\mathfrak{v} = \left(\frac{d v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cdot \mathfrak{k}.$$

Führt man die gleiche Operation bei den Elementarquadraten durch, die sich in Richtung der beiden anderen Koordinaten in einem Punkt schneiden (Abb. 36), so ist

$$\text{rot}\,\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathfrak{k} = \nabla \times \mathfrak{v}.$$

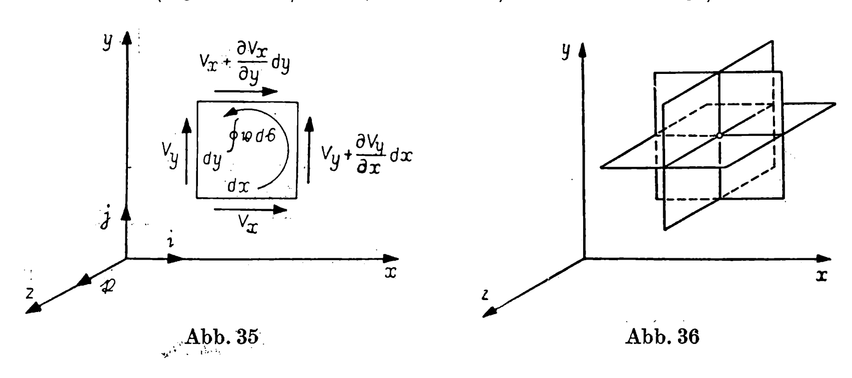


Abb. 35 Abb. 36

Die Bildung von rot $\mathfrak{v}$ bzw. die Operation $\nabla \times \mathfrak{v}$ sind innere, vom Koordinatensystem unabhängige Charakteristiken des Vektorfeldes.

d) Geschichtete und solenoidale Vektorfelder

Es soll nach der notwendigen Voraussetzung gefragt werden, um ein Vektorfeld durch den Gradienten eines Skalarfeldes ausdrücken zu können. Es sei $\mathfrak{v}_\varphi$ ein aus einem einwertigen Skalarfeld φ abgeleitetes Vektorfeld. Bildet man das Linienintegral längs einer beliebigen Kurve und definiert die Punkte der Kurve durch den aus dem Ursprung 0 gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r}$, dann ist

$$d\mathfrak{s} = d\mathfrak{r}$$

und

$$\int_A^B \mathfrak{v}_\varphi\, d\mathfrak{s} = \int_A^B \mathfrak{v}_\varphi\, d\mathfrak{r} = \int_A^B \text{grad}\,\varphi \cdot d\mathfrak{r}.$$

Mit $\text{grad}\,\varphi \cdot d\mathfrak{r} = d\,\varphi$ ergibt sich

$$\int_A^B \mathfrak{v}_\varphi\, d\mathfrak{s} = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A.$$

Das Linienintegral ist also nur vom Wert der Endpunkte abhängig und unabhängig vom Weg. Hieraus folgt, daß sich der Wert Null ergibt, wenn die Integration von B bis A auf beliebigem Wege geschlossen wird (Abb. 37).

Ist das Linienintegral über eine beliebige geschlossene Kurve Null, kann das Vektorfeld durch den Gradienten eines Skalarfeldes ausgedrückt werden. Die Rotation des Feldes ist Null, da sie ebenfalls aus einem längs einer geschlossenen Kurve berechneten Integral abgeleitet wurde. Diese Bedingung ist mathematisch verständlich darzustellen:

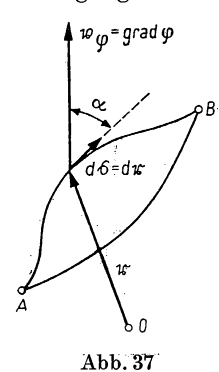


Abb. 37

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \times (\nabla\varphi) = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Ein solches Feld ist durch Äquipotentialflächen, also Flächen, die durch konstante skalare Werte verlaufen, darstellbar. Die Flußlinien, also die Vektoren, verlaufen überall senkrecht zu diesen Flächen. In der Ebene wird das Netz durch zwei sich senkrecht schneidende Kurvenscharen gekennzeichnet.

Derartige rotationsfreie Vektorfelder werden wegen ihrer Struktur laminare Felder genannt.

Ist die Divergenz eines Vektorfeldes Null, dann entstehen im Feld an keiner Stelle Kraftlinien. In diesem Falle bilden die Flußlinien Röhren, die entweder in sich geschlossen sind oder an Grenzflächen im Endlichen oder Unendlichen enden. Quellenfreie bzw. senkenfreie Vektorfelder dieser Art nennt man solenoidale Vektorfelder.

(9) $$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \nabla\,(\nabla\times\mathfrak{v}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\, dy} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\, dz} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y\, dz} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z\,\partial y} = 0;$$

(10) Die Komponente von rot $\mathfrak{v}$ in der x-Richtung lautet

$$\operatorname{rot}_x\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathfrak{i}.$$

Dagegen ist

$$\mathfrak{v} = \operatorname{rot}\mathfrak{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathfrak{k}$$

$$= v_x\mathfrak{i} + v_y\mathfrak{j} + v_z\mathfrak{k}.$$

Setzt man diesen Wert in die vorige Gleichung ein, dann erhält man

$$\mathrm{rot}_x \mathfrak{v} = \mathrm{rot}_x \mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]\mathfrak{i}\,.$$

Ordnet man und fügt $0 = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ hinzu, so ergibt sich

$$\mathrm{rot}_x \mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\,\partial z}\right)\mathfrak{i} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot A_x \cdot \mathfrak{i}$$

$$= (\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A})_x\,\mathfrak{i} - (\nabla^2 \mathfrak{A}_x)\,\mathfrak{i}\,.$$

Es gilt also für alle drei Komponenten

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \nabla^2.$$

(11) Die relative Permeabilität der dia- und paramagnetischen Stoffe kann in der Praxis als konstant und gleich eins angenommen werden.

(12) Für den Umlauf einer „Einheitspolstärke" wird eine bestimmte mechanische Arbeit benötigt. Diese verwandelt sich in elektrische Arbeit, da die Bewegung der magnetischen Polstärke in einem Leiter eine Spannung induziert. Diese erzeugt mit dem Strom in der Leitung eine Leistung.

(13) Siehe ausführlich: G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik. 7. Auflage, Leipzig 1950. S. 242, 269.

(14) Die magnetische Feldstärke kann auch als die in einem bestimmten Punkt auf den Einheitspol wirkende Kraft definiert werden. In diesem Falle ist nach dem Coulombschen Gesetz

$$\mathfrak{H} = \frac{(m \cdot dF) \cdot 1}{4\pi\mu_0 r^2}\,\mathfrak{r}^0.$$

Das Potential ergibt sich zu

$$V = -\int_\infty^P \mathfrak{H}\, d\mathfrak{r} = \frac{\frac{m}{\mu_0}\, dF}{4\pi r}\,.$$

(15) Die Größe des Raumwinkels wird durch die Fläche gekennzeichnet, den der Mantel eines zur Grenzlinie der fraglichen Fläche aufgetragenen Kegels mit der Spitze P aus der Einheitskugel herausschneidet. In Abb. 38 schneidet z. B. der zur Grenzlinie von dF gezogene Kegel aus der Kugel mit dem Halbmesser 1 die Fläche $d\omega$ und aus der Kugel mit dem Radius r die Fläche $dF \cos\vartheta$ aus. Es ist dann

$$\frac{d\omega}{1^2} = \frac{dF \cdot \cos\vartheta}{r^2}\,.$$

Dabei ist ϑ der Neigungswinkel zwischen der Normalen von dF und dem dazu gezogenen Radius.

Andererseits ist $dF \cos\vartheta = dF \cdot \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}^0 = d\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{r}^0$. Damit ist die Formel bewiesen; $\mathfrak{r}^0$ und $\mathfrak{n}$ sind Einheitsvektoren, die die Richtung des Radius bzw. der Normalen von dF definieren.

(16) Es soll die Potentialänderung festgestellt werden, wenn sich P oder, was damit gleichwertig ist, die Stromschleife verschiebt. Ein Element $d\mathfrak{s}$ der Schleife bestreicht bei seiner Bewegung die Fläche $ds \cdot dp$. Diese ist durch den Vektor des Vektorproduktes $d\mathfrak{s} \times d\mathfrak{p}$ charakterisierbar.

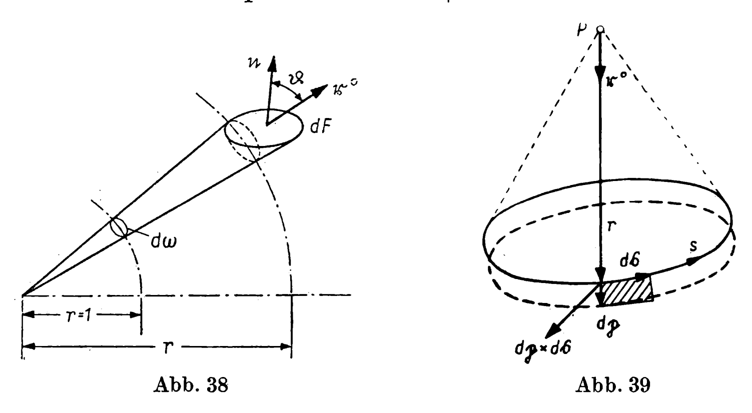


Abb. 38 Abb. 39

Der Raumwinkel dieser Fläche aus P ist:

$$\frac{\mathfrak{r}^0 (d\mathfrak{s} \times d\mathfrak{p})}{r^2}.$$

Die gesamte Änderung entlang der Stromschleife ist

$$d\omega = \oint \frac{r^0 (d\mathfrak{s} \times d\mathfrak{p})}{r^2} = \mathfrak{p}^0 dp \oint \frac{\mathfrak{r}^0}{r^2} \times d\mathfrak{s}.$$

Dabei ist $\mathfrak{p}^0$ ein Einheitsvektor in der Richtung von $d\mathfrak{p}$. Das Maß der Änderung des Raumwinkels, wobei $\mathfrak{t}$ der tangentiale Einheitsvektor ist, ergibt sich mit $d\mathfrak{s} = \mathfrak{t} \cdot ds$ zu

$$\frac{d\omega}{dp} = \mathfrak{p}^0 \oint \left(\frac{\mathfrak{r}^0}{r^2} \times \mathfrak{t}\right) ds.$$

$-\mathfrak{p}^0 \operatorname{grad} \omega$ ist dieselbe Änderung, da $-\operatorname{grad} \omega$ die größte Verminderung darstellt und $\mathfrak{p}^0 \operatorname{grad} \omega$ die Komponente in Richtung von $\mathfrak{p}^0$ ist. Aus der vorhererwähnten Gleichheit folgt

$$i \frac{d\omega}{dp} = i\,\mathfrak{p}^0 \oint \frac{(\mathfrak{r} \times \mathfrak{t})\, ds}{r^2} = -\mathfrak{p}^0 i \operatorname{grad} \omega = \mathfrak{p}^0 \cdot 4\pi \mathfrak{H},$$

und daraus ergibt sich

$$\mathfrak{H} = \frac{i}{4\pi} \int \frac{(\mathfrak{r} \times \mathfrak{t})}{r^2} \, ds.$$

Dieser Ausdruck stellt das BIOT-SAVARTsche Gesetz dar. Es ist, wie noch gezeigt wird, aus dem Ausdruck für das Vektorpotential abzuleiten. Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

(17) L. R. BECKER: Theorie der Elektrizität Bd. I. Einführung in die MAXWELLsche Theorie. 15. Auflage 1951. S. 120.

(18) Für ein homogenes Feld mit der Raumladungsdichte ϱ ergibt sich aus der Zusammensetzung der Beziehungen

$$\operatorname{div} \vartheta = \varrho, \qquad \vartheta = \varepsilon \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad} V$$

die POISSONsche Gleichung

$$\nabla^2 V = -\frac{\varrho}{\varepsilon}.$$

Gesucht sei das elektrische Potential als Funktion der Ladungsdichte. Eine einzige punktförmige Ladung Q erzeugt im Abstand r ein Potential

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}.$$

Mehrere Punktladungen erzeugen in einem beliebigen Punkt ein Potential

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{\varkappa} \frac{Q_\varkappa}{r_\varkappa}.$$

$r_\varkappa$ bedeutet die Entfernung von $Q_\varkappa$ zum betrachteten Punkt.

Ist die Ladung in einem Feld mit der Ladungsdichte ϱ verteilt, so beträgt in einem kleinen Raumelement dv die Ladung $\varrho \, dv$. Das Potential eines Punktes ist die Summe der Potentialbeträge jedes Raumelementes:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\varrho}{r} \, dv.$$

Die für die einzelnen Komponenten des Vektorpotentials gültige Differentialgleichung hat eine der POISSONschen Gleichung ähnliche Form. Demzufolge können ihre Lösungen in ähnlicher Form geschrieben werden. Das Zusammenziehen der drei Komponenten stellt die im Text angedeutete Lösung in Vektorform dar.

(19) Der Einheitsvektor ist der Quotient des Vektors und seines absoluten Betrages: $\mathfrak{r}^0 = \frac{\mathfrak{r}}{r}$.

(20)

$$-\mathfrak{r} \times d\mathfrak{s} = d\mathfrak{s} \times \mathfrak{r}.$$

(21) Die Funktion einer komplexen Veränderlichen $z = x + jy$

$$w = u + jv = f(z)$$

ist in einem bestimmten Gebiet differenzierbar, wenn in jedem beliebigen Punkt des Gebietes der Differenzenquotient

$$\frac{f(\zeta + q) - f(\zeta)}{q} = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

bei jedem Grenzübergang $z \to \zeta$ einer bestimmten Zahl zustrebt oder, anders ausgedrückt, wenn der Quotient in zwei Glieder aufgelöst werden kann, deren erstes von $q = \Delta z$ unabhängig ist und deren zweites sich mit $q \to 0$ dem Werte Null nähert. Der Differentialquotient ist von der Annäherungsrichtung zum Punkt ζ unabhängig, d.h., der Endpunkt des Vektors q kann auf einer beliebigen Kurve zum Ursprung laufen.

Bei Annäherung an den Punkt ζ parallel zur x-Achse erfolgt keine Änderung in Richtung der y-Achse. Somit gilt

$$\lim_{z \to \zeta} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \left(j = \sqrt{-1}\right).$$

Erfolgt die Annäherung parallel zur y-Achse, dann erfolgt in Richtung der x-Achse keine Änderung. Es ist

$$\frac{1}{j}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{j}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -j\left(\frac{\partial u}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

In jedem Fall ergibt sich der gleiche Differentialquotient

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = -j\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Die imaginären und reellen Teile dieser Gleichung sind die sogenannten CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Differenziert man die erste Gleichung nach x, die zweite nach y, dann die zweite nach x und die erste nach y, so wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Subtrahiert bzw. addiert man je zwei und zwei Gleichungen für u und v, erhält man die LAPLACEschen Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

(22) Aus den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen erhält man

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{-\frac{\partial v}{\partial x}} \quad \text{und deshalb} \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{1}{\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}}.$$

Auf der linken Seite stehen die Richtungstangenten der Kurven $u = \text{const}$, auf der rechten Seite im Nenner die Richtungstangenten der Kurven $v = \text{const}$. Es ist

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{u = \text{const}} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{v = \text{const}} = \frac{-\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}},$$

d.h.,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{u = \text{const}} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{v = \text{const}}}.$$

Die Kurvenscharen $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ schneiden sich also senkrecht, sie sind orthogonal.

(23) Die komplexe Zahl w sei eine beliebige eindeutige Funktion von z:

$$w(z) = u(z) + j v(z), \qquad z = x + jy.$$

Durchläuft ein Punkt der z-Ebene irgendeine Kurve, so beschreibt der entsprechende Punkt in der w-Ebene ebenfalls eine Kurve. Verschiebt sich nun der Punkt der z-Ebene längs der Kurve um das Wegelement dz, so beträgt die Verrückung des Punktes in der w-Ebene

$$dw = \left(\frac{dw}{dz}\right) dz.$$

Die komplexe Zahl $\frac{dw}{dz}$, in Exponentialform geschrieben, lautet dann:

$$\frac{dw}{dz} = \left|\frac{dw}{dz}\right| \cdot e^{j \operatorname{arc} \frac{dw}{dz}} = a e^{j\vartheta};$$

dabei ist vorausgesetzt, daß $\frac{dw}{dz} \neq 0$ ist. Somit ist

$$dw = a \cdot e^{j\vartheta} \cdot dz.$$

Es bedeuten a den Absolutwert des Differentialquotienten, ϑ den Winkel der Differentiale dw und dz. Werden in einem Punkt z_1 der z-Ebene zwei solche Differentiale dz betrachtet, die einen beliebigen Winkel β miteinander bilden, so entspricht dies in der w-Ebene in Punkt w_1 zwei solchen Richtungen von dw, die ebenfalls unter einem Winkel β geneigt sind, da der Drehwinkel konstant bleibt, weil der Winkel des Differentialquotienten in einem Punkt konstant ist. Dies gilt mit Ausnahme jener Punkte, in denen der Differentialquotient Null ist.

Der Absolutwert des Differentialquotientenvektors hängt jedoch ebenfalls nur vom gewählten Punkt z_1 ab und ist unabhängig von der Richtung des Vektors dz, so daß die Funktion die Umgebung des Punktes z_1, im Verhältnis a vergrößert, in ähnlicher Form in die Umgebung von w_1 überträgt. Eine gegebene Elementarfläche der Ebene z wird also in ihren linearen Dimensionen a-mal größer und dreht sich um einen Winkel ϑ. Sie bleibt jedoch von gleicher Gestalt. Diese winkeltreue und im Kleinen formgetreue Abbildung wird konforme Abbildung genannt. Analytische Funktionen ergeben solche konformen Abbildungen.

Das bisherige gilt für Elementarstrecken. Wegen der Winkeltreue kann behauptet werden, daß das zu den Koordinaten parallele quadratische Netz von $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ der Ebene u, v ebenfalls in ein (im allgemeinen krummliniges) orthogonales Netz übergeht. Da jedoch die Proportionalität der linearen Dimensionen eine Differentialeigenschaft ist, ist die Gestalt der zwei Netze geometrisch nicht notwendig ähnlich.

Einen einfachen, klaren Beweis der SCHWARZ-CHRISTOFFELschen Transformation siehe Lit. K [14], S. 116 bis 118.

(24) In eine TAYLOR-Reihe entwickelt, gilt (Abb. 21)

$$V_P = V_{(0+a)} = V_0 + \frac{a}{1!}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{a^3}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \frac{a^4}{4!}\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + \cdots,$$

$$V_R = V_{(0-a)} = V_0 - \frac{a}{1!}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{a^3}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \frac{a^4}{4!}\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - \cdots.$$

Addition beider Ausdrücke ergibt

$$V_P + V_R - 2V_0 = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a^4 \frac{\partial^2 V}{\partial x^4} + \cdots.$$

Ebenso erhält man

$$V_Q + V_S - 2\,V_0 = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a^4 \frac{\partial^2 V}{\partial y^4} + \cdots.$$

Ist a entsprechend klein, dann kann das Glied mit a^4 vernachlässigt werden. Aus der Addition der beiden Gleichungen folgt

$$V_P + V_R + V_Q + V_S - 4\,V_0 = a^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = 0.$$

(25) Statt asymptotisch nähern sich die Beträge schwingungsartig dem Grenzwert (Abb. 40, Kurve 2 statt Kurve 1).

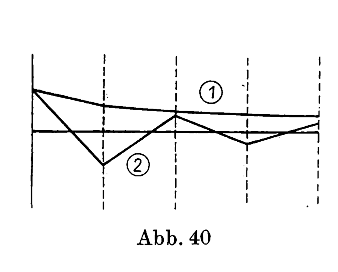


Abb. 40

Abb. 41

(26) Die Beziehung $w = e^z$ führt das quadratische Netz der z-Ebene in das aus Kreisbögen und Radien bestehende Netz der w-Ebene über. Unter Berücksichtigung der Formeln $w = |w|\, e^{j \operatorname{arc} w} = r e^{j\vartheta}$ und $z = x + jy$ ist

$$w = r e^{j\vartheta} = e^{x+jy} = e^x e^{jy}.$$

Daraus folgt: $r = e^x$ und $\vartheta = y$.

(27) Graphisch kann die Einteilung folgendermaßen dargestellt werden: Am äußeren Ende des Raumstückes wird ein „Viereck“ mit gleicher Mittellinienlänge gezeichnet. Die von den Punkten A und B ausgehenden beliebigen Geraden schneiden sich im Punkte C. Dann wird C mit 0 verbunden. Entsprechend Abbildung 41 schneiden die zu CA und CB gezogenen Parallelen die übrigen Netzpunkte.

(28) Die Interpolation kann zweckmäßig mit einer auf durchsichtigem Papier gezeichneten Parallel- oder Projektionsskala durchgeführt werden (Abb. 42a, b). Der Interpolationspunkt wird mit einer Nadel durchstochen.

(29) Wird die Änderung des Potentials senkrecht auf die Fläche in der Nähe von V_0 mit einer quadratischen Parabel angenähert, dann gilt

$$V = A_1 y^2 + A_2 y + V_0.$$

Das Potential des im Abstand $y = a$ liegenden Punktes Q (Abb. 24) ist

$$V_Q = A_1 a^2 + A_2 a + V_0.$$

Das Potential des Punktes Q' in der Entfernung $y = 2a$ ist

$$V_{Q'} = A_1 \cdot 4a^2 + A_2 \cdot 2a + V_0.$$

Wird die erste Gleichung mit -4 multipliziert und zur zweiten addiert, folgt

$$-4 V_Q + V_{Q'} = -2 A_2 a - 3 V_0$$

und damit

$$B = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = A_1 \cdot 0 + A_2 = A_2 = \frac{4 V_Q - 3 V_0 - V_{Q'}}{2a}.$$

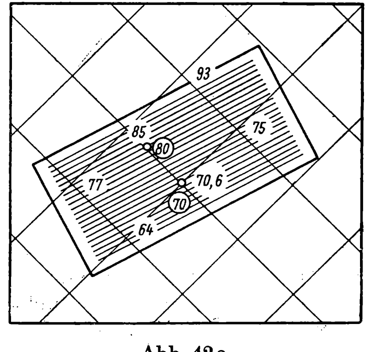


Abb. 42a

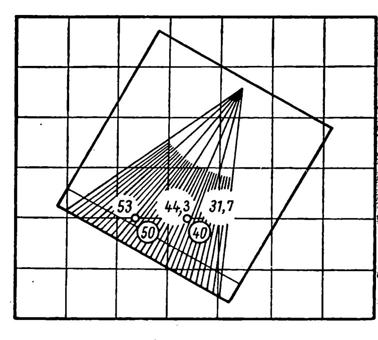


Abb. 42b

(30) Diese Annahme ist nicht immer zulässig. Bei den Nuten einer Ankerfläche sind z. B. die Zähne im allgemeinen stark gesättigt. Infolgedessen vermindert sich die Permeabilität, und entlang der Zähne kann ein nicht mehr zu vernachlässigender magnetischer Spannungsabfall auftreten. Die einzelnen Zähne liegen an verschiedenen Stellen, sie liegen demzufolge in Feldern verschiedener Stärke. Ihre Sättigung ist also verschieden. In einem solchen Fall bildet die Fläche des Eisens keine Niveaufläche. Eine derart genutete Grenzlinie kann durch eine gleichwertige Kurvenfläche, die die Sättigung der Zähne bereits berücksichtigt, ersetzt werden (ausführlich: RICHTER, Arch. f. Elektrotechn., XI. S. 95, Abb. 12).

(31) Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man bedenkt, daß die Feldstärke der negative Gradient des Potentials ist, wenn also s in Richtung der größten Änderungsgeschwindigkeit verläuft,

$$B = \mu_0 \frac{\partial U_m}{\partial s} = \mu_0 \frac{U_m}{n\beta}.$$

(32) Die bisherigen Annahmen galten nur unter der Annahme, daß der Strombelag zu einer dimensionslos dünnen Linie zusammenschrumpft. Diese ist von einem endlichen Strom durchflossen. Die Stromdichte ist also unendlich. Bei endlicher Dicke des Kupfers kann an der Grenze Luft–Kupfer keine Brechung auftreten, da die Permeabilität beider Stoffe gleich ist. Eine Brechung kann nur dann stattfinden, wenn die Stromdichte unendlich, d.h. der Belag differentielle Dicke hat. Die Durchflutung wird also auch im Grenzfalle den Integrationsweg umgeben. Dann ist

$$H_{t_1} - H_{t_2} = A.$$

Auf einer Eisenfläche kann $H_{t_1} = 0$ gelten. Hiermit ist

$$H_{t_2} = -A.$$

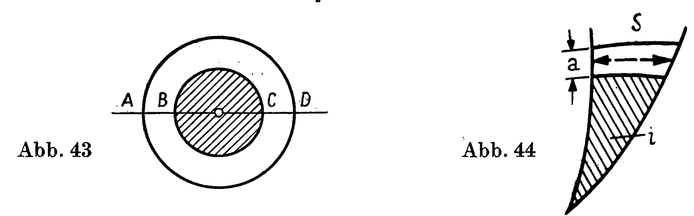


Abb. 43 Abb. 44

Die Größe der Tangentialkomponente im Eisen hängt also nur vom Strombelag an der betrachteten Stelle ab. Die Äquipotentiallinien treten in die Fläche so ein, daß sie gleiche Durchflutungen umschließen.

33) Längs der abgebildeten, den kreisförmigen Leiter durchlaufenden Linie *ABCD* (Abb. 43), die überall senkrecht zu den Kraftlinien verläuft, braucht keine Arbeit geleistet zu werden, wenn eine Einheitsladung an der Linie entlanggeführt wird.

(34) Beweis: Nach Punkt 1 ist auf Grund des Durchflutungsgesetzes der Spannungsabfall auf dem Weg zwischen zwei arbeitsfreien Linien gleich der Strommenge in dem Querschnitt, gebildet aus der Strecke und den arbeitsfreien Linien. Mit den Bezeichnungen von Abb. 44 ist also

$$H \cdot s = i.$$

Laufen im abgebildeten Flußrohr der Breite a nun k Feldstärkelinien bzw. $\mu_0 k$ Induktionslinien durch, so ist nach Definition, wobei in senkrechter Richtung Einheitstiefe angenommen sei,

$$H = \frac{k}{a},$$

so daß

$$a = \frac{k}{H} = \frac{ks}{i}$$

gilt.

Die Breite steht also, wie behauptet, im umgekehrten Verhältnis zu i und in direktem Verhältnis zu s.

(35) Die Kontrollvorschriften sind im wesentlichen mit den Zeichenvorschriften identisch.

(36) Es ist einleuchtend, daß diese Bedingung das gleiche fordert wie die Zeichenregel 5. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen der dortigen Beweisführung und unter der Annahme, daß in jeder Flußröhre die gleiche Zahl Kraftlinien, d.h. die gleichen Sprünge vorhanden sind, ergibt sich ein konstanter Wert für k. Somit ist

$$\frac{s}{a} = \text{const} \cdot i\,.$$

Der Quotient $\frac{s}{a}$ nimmt nach außen ständig zu, und beim Verlassen des Kupfers wird er gleich eins. An dieser Stelle ergeben sich also bereits wieder die üblichen Quadrate.

Beispiel 1

Mit welchem Strom muß eine Spule von $w = 100$ Windungen, die auf einem geschlossenen Eisenkern (Abb. 45) angeordnet ist, gespeist werden, damit im Schenkel II ein Fluß von $\Phi = 40000$ Maxwell erzeugt wird?

Die Streuung der Anordnung soll vernachlässigt werden. Der Fluß soll über den Querschnitt gleichmäßig verteilt sein. Der Eisenkern bestehe aus Dynamoblech.

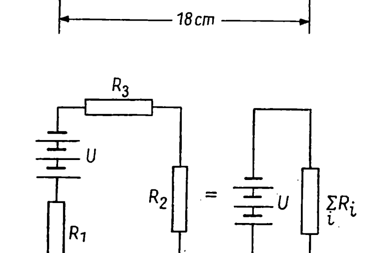


Abb. 45

Da gleichmäßiger Querschnitt F angenommen ist, beträgt die Induktion im gesamten Eisenkern, also auch im Schenkel II,

$$B = \frac{\Phi}{F} = \frac{40000}{2 \times 2} \frac{\text{M}}{\text{cm}^2} = 10000 \text{ G}.$$

Aus der Magnetisierungskurve des Dynamoblechs (Abb. 12) findet man hierfür die Erregung

$$H = 3{,}2 \frac{\text{A}}{\text{cm}}.$$

Da die Magnetisierungskurven bestenfalls auf 2 bis 3% genau sind, lohnt es in der Praxis nicht, genauere Berechnungen anzustreben. Die mittlere Kraftlinienlänge beträgt

$$s = (2 \cdot 10 + 2 \cdot 16) \text{ cm} = 52 \text{ cm}.$$

Die notwendige Durchflutung wird dann

$$\Theta = H \cdot s = 3{,}2 \frac{\text{A}}{\text{cm}} \cdot 52 \text{ cm} = 166 \text{ A}$$

und die gesuchte Stromstärke

$$i = \frac{\Theta}{w} = \frac{166 \text{ A}}{100} = 1{,}66 \text{ A}.$$

---

[1]) Schwere oder außergewöhnliche Beispiele sind mit einem Stern gekennzeichnet.

In diesem wie in den folgenden Beispielen ist der dem magnetischen Kreis analoge elektrische Stromkreis gezeichnet. Den einzelnen Abschnitten des magnetischen Kreises sind elektrische Widerstände zugeordnet, die mit willkürlichen Indizes bezeichnet sind. Es ist dabei klar, daß einige oder alle in Reihe geschalteten Widerstände für einen gegebenen magnetischen Zustand zusammengezogen werden können.

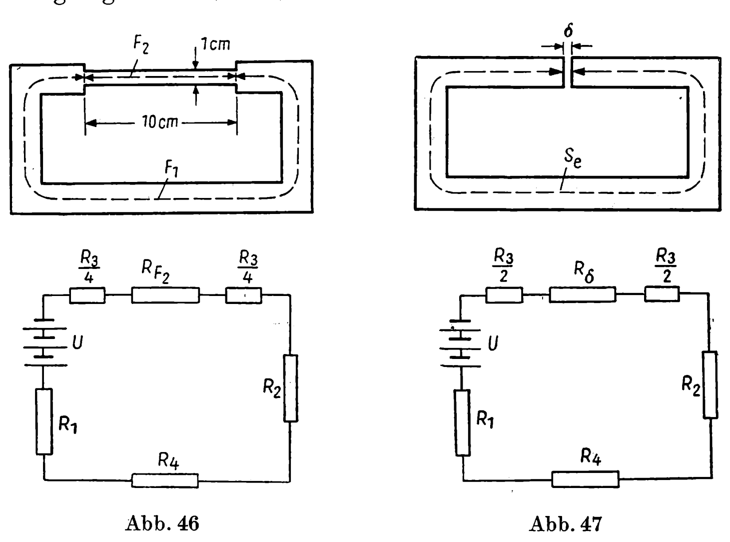


Abb. 46 Abb. 47

Beispiel 2

Wie groß ist die erforderliche Stromstärke bei sonst gleichen Verhältnissen wie im Beispiel 1, wenn der Querschnitt des oberen Joches des Eisenkerns entsprechend der Abb. 46 verjüngt ist?

Im Kreisabschnitt mit dem ursprünglichen Querschnitt F_1 sind Induktion und Feldstärke gleichgeblieben. Der magnetische Spannungsabfall beträgt in diesem Abschnitt

$$U_{mF_1} = H_{F_1} s_{F_1} = 3{,}2 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}} \cdot (52 - 10)\,\mathrm{cm} = 134{,}4\,\mathrm{A}.$$

Im Abschnitt mit dem Querschnitt F_2 hat die Induktion den doppelten Wert

$$B_{F_2} = \frac{\Phi}{F_2} = \frac{40\,000}{2} \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{cm}^2} = 20\,000\,\mathrm{G}.$$

Aus der Magnetisierungskurve (Abb. 12) folgt für H_{F_2} ein Wert

$$H_{F_2} = 260 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}.$$

Die magnetische Spannung beträgt

$$U_{mF_2} = (260 \cdot 10)\ \text{A} = 2600\ \text{A}.$$

Die Durchflutung ergibt sich zu

$$\Theta = U_{mF_1} + U_{mF_2} = H_{F_1} \cdot s_{F_1} + H_{F_2} \cdot s_{F_2} = 134{,}4\ \text{A} + 2600\ \text{A} = 2734{,}4\ \text{A}.$$

Hierzu ist der Strom

$$i = \frac{2734\ \text{A}}{100} = 27{,}34\ \text{A}$$

erforderlich.

Beispiel 3

Welche Stromstärke ist notwendig, wenn das obere Joch nach Abb. 47 einen Luftspalt von $\delta = 0{,}2$ cm enthält?

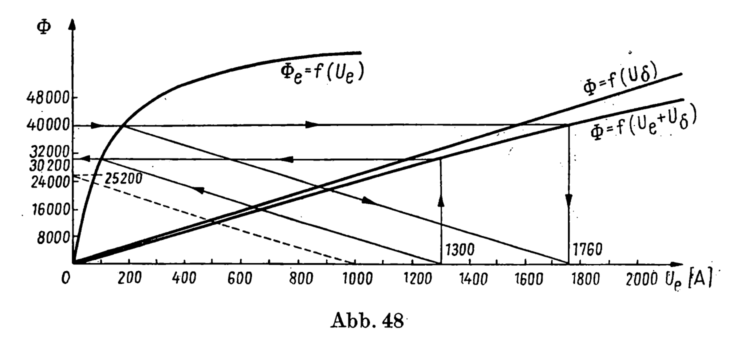


Abb. 48

Die Durchflutung ist die Summe der auf den Eisenweg und den Luftspalt entfallenden magnetischen Spannungen:

$$\Theta = U_{me} + U_{ml} = H_e\, s_e + H_\delta\, \delta = 3{,}2 \cdot 52\ \text{A} + 0{,}8 \cdot 10000 \cdot 0{,}2\ \text{A} = 1766\ \text{A}.$$

Dabei ist

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{B_\delta}{1{,}256\ \dfrac{\text{G} \cdot \text{cm}}{\text{A}}} \approx 0{,}8 \left(\frac{B_\delta}{\text{G}}\right) \frac{\text{A}}{\text{cm}}.$$

Bei der Berechnung der mittleren Eisenlänge ist der Luftspalt unberücksichtigt geblieben. Die Feldstärke im Eisen ist die gleiche wie vorher. Die erforderliche Stromstärke beträgt

$$i = \frac{\Theta}{w} = \frac{1766\ \text{A}}{100} = 17{,}66\ \text{A}.$$

Diese Aufgabe kann auch graphisch gelöst werden (Abb. 48). Man zeichnet die Magnetisierungskurve des Eisens, indem man die auf das Eisen entfallende

Durchflutung $H_e s_e = H_e \cdot 52$ cm waagerecht und den Fluß $BF = B \cdot 4\,\text{cm}^2$ senkrecht aufträgt.

Die Magnetisierungskurve des Luftspaltes ist eine Gerade, deren Neigung sich aus

$$\Phi = B \cdot F = \mu_0 H F = \mu_0 \frac{U_\delta}{\delta} F = 1{,}256 \frac{\left(\frac{U_\delta}{\mathrm{A}}\right)}{0{,}2} \cdot 4\,\mathrm{M} = 25{,}2 \left(\frac{U_\delta}{\mathrm{A}}\right) \mathrm{M}$$

ergibt zu

$$\frac{\Phi}{U_\delta} = 25{,}2 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}.$$

Einem Fluß $\Phi = 25200$ M entspricht ein $U_\delta = 1000$ A. Die Gerade wird mit einem negativen Winkel gezeichnet, indem man die Punkte $\Theta = 1000$ A und $\Phi = 25200$ M miteinander verbindet. Nun ermittelt man den Schnittpunkt der Horizontalen des Wertes $\Phi = 40000$ M mit der Magnetisierungskurve des Eisens. Durch den Schnittpunkt legt man eine Parallele zu der Geraden für Luft. Diese Parallele schneidet auf der horizontalen Achse die Summe der auf das Eisen und auf die Luftstrecke entfallenden Spannungen, d.h. das gesuchte Θ, ab. In der Abbildung beträgt, graphisch ermittelt, $\Theta = 1760$ A. Man kann diese Aufgabe auch so lösen, daß man aus den Kurven $\Phi = f(U_\delta)$ und $\Phi = f(U_e)$ die Kurve $\Phi = f(U_\delta + U_e) = f(\Theta)$ konstruiert. Aus der resultierenden Kurve kann der zu $\Phi = 40000$ M gehörende Wert $\Theta = 1760$ A unmittelbar entnommen werden.

Beispiel 4

Wie groß ist die Induktion im Luftspalt des Eisenkernes nach Beispiel 3, wenn die Spule mit einem Strom von 13 A gespeist wird?

Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt am zweckmäßigsten durch Umkehrung der graphischen Lösung des Beispiels 3. Ausgehend vom Wert für die Durchflutung 13 A · 100 = 1300 A wird mit der Kurve für den Luftspalt die Magnetisierungskurve geschnitten. Die vom Schnittpunkt gezogene Waagerechte ergibt den gesuchten Fluß. Nach Abb. 48 beträgt dieser

30200 M.

Damit ist die Induktion

$$B = \frac{30200\,\mathrm{M}}{4\,\mathrm{cm}^2} = 7550 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{cm}^2} = 7550\,\mathrm{G}.$$

Aus der Magnetisierungskurve $\Phi = f(\Theta)$ des gesamten Kreises kann der zur Durchflutung $\Theta = 1300$ A gehörende Wert des Flusses $\Phi = 30200$ M direkt abgelesen werden.

Hierzu eine Proberechnung: Einer Induktion $B = 7550$ G entspricht ein $He = 1{,}85$ A/cm. Damit wird die Durchflutung

$$\Theta = 1{,}85 \cdot 52\,\mathrm{A} + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 7550\,\mathrm{A} = 1304{,}2\,\mathrm{A}.$$

Aus der Abbildung ist zu ersehen, daß der verhältnismäßig kleine Luftspalt den größten Teil der magnetischen Umlaufspannung verbraucht. Dieser beträgt unter Umständen ein Vielfaches des auf den langen Eisenweg entfallenden Wertes. Weiterhin ist ersichtlich, daß durch Einfügung eines Luftspaltes ein linearer Verlauf der Magnetisierungskurve erreicht wird.

Beispiel 5

Wie groß ist im Beispiel 1 der notwendige Erregerstrom, wenn die linke Hälfte des Eisenkerns bei gleichen Abmessungen aus Transformatorenblech hergestellt ist? Die beiden Hälften des Kerns sind dabei ohne Luftspalt zusammengesetzt (Abb. 49a). Welcher Fluß wird von der Durchflutung im Kreis hervorgerufen, wenn die Stoßstelle des Kernes eine Isolierstoffzwischenlage von $\delta = 0{,}15$ mm enthält?

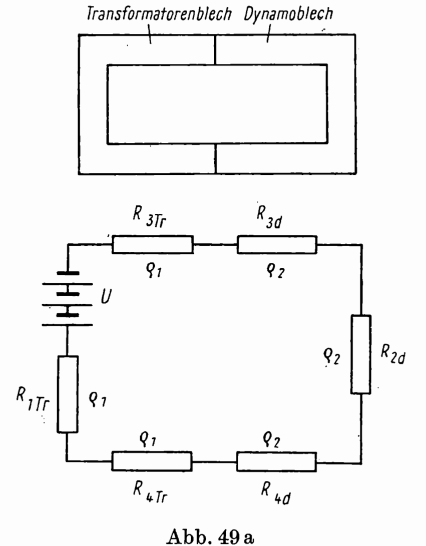


Abb. 49 a

Einer Induktion von $B = 10000$ Gauß entspricht in der Magnetisierungskurve des Transformatoren- bzw. Dynamoblechs

$$H_{\mathrm{tr}} = 4{,}7 \, \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}} \quad \text{bzw.} \quad H_{\mathrm{dyn}} = 3{,}2 \, \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}.$$

Somit wird

$$\Theta = U_{m\,\mathrm{dyn}} + U_{m\,\mathrm{tr}}$$
$$= (3{,}2 \cdot 26 + 4{,}7 \cdot 26)\ \mathrm{A} = 205{,}2\,\mathrm{A}.$$

Der Strom ergibt sich zu

$$i = \frac{\Theta}{w} \approx 2\,\mathrm{A}.$$

Zur Bestimmung des Flusses, den die Durchflutung bei Berücksichtigung der Zwischenlage an der Stoßstelle hervorruft, wird die Magnetisierungskurve des gesamten Kreises aufgezeichnet (Abb. 49b, S. 106). Die Magnetisierungskurven der einzelnen Kreisabschnitte werden hierbei addiert. Der Gang der Rechnung ist aus der Abbildung und der Tabelle 1 (S. 106) ersichtlich. Es sind einige Flußwerte angenommen und dazu die magnetischen Spannungen der einzelnen Abschnitte und deren Summe, die Durchflutung, berechnet worden.

Aus der so gewonnenen resultierenden Magnetisierungskurve des Kreises $\Phi = f(\Theta)$ ergibt $\Theta = 206{,}8$ A den Fluß $\Phi = 30800$ M. Zur Kontrolle dient die letzte Zeile der Tabelle.

Beispiel 6

Welche Stromstärke ist notwendig, wenn in dem wie oben dimensionierten Eisenkern aus Dynamoblech in der Mitte, ohne Luftspalt, ein Stück aus

Tabelle 1

Φ M	$B_{tr, dyn}$ G	H_{tr} A/cm	$H_{tr} \cdot s_{tr}$ A	H_{dyn} A/cm	$H_{dyn} \cdot s_{dyn}$ A	$0{,}8\, B_e \cdot \delta$ A	$\Theta = 0{,}8 B_e \delta + H_{dyn} s_{dyn} + H_{tr} \cdot s_{tr}$ A
40000	10000	4,8	124,7	3,2	83,2	120	327,9
36000	9000	3,6	93,6	2,55	66,3	108	267,9
32000	8000	2,7	70,2	2	52	96	218,2
24000	6000	1,65	42,9	1,3	33,8	72	148,7
16000	4000	1,15	29,9	0,9	23,4	48	101,3
30800	7700	2,55	66,3	1,85	48,1	92,4	206,8

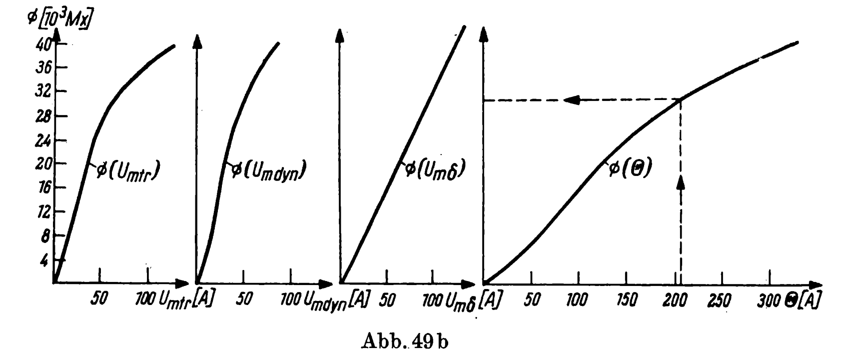


Abb. 49b

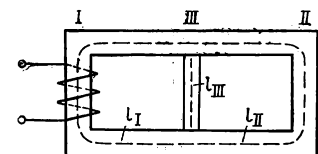
Transformatorenblech mit einem Querschnitt von $1 \times 2\,\text{cm}^2$ eingefügt wird (Abb. 50)?

Für das rechte Fenster des Eisenkerns lautet das Durchflutungsgesetz:

$$H_{II}\, s_{II} - H_{III}\, s_{III} = 0.$$

Das negative Vorzeichen tritt deshalb auf, weil die Richtung von H in beiden Schenkeln gleich ist. Sie geht also in beiden von oben nach unten oder umgekehrt.

Für H_{III} folgt



$$H_{III} = \frac{H_{II}\, s_{II}}{s_{III}} = \frac{3{,}2\,\frac{\text{A}}{\text{cm}} \cdot 26\ \text{cm}}{8\ \text{cm}} = 10{,}4\,\frac{\text{A}}{\text{cm}}.$$

Aus der Magnetisierungskurve für Transformatorenblech folgt die zu dieser Feldstärke gehörende Induktion

$$B_{III} = 12000\ \text{G}.$$

Der Fluß im Schenkel III beträgt

$$\Phi_{III} = B_{III} \cdot F_{III} = 12000\ \text{G} \cdot 2\ \text{cm}^2$$
$$= 24000\ \text{M}.$$

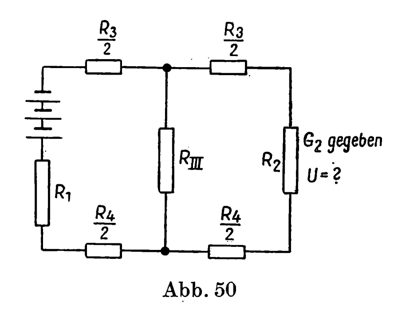


Abb. 50

Der Fluß im Schenkel I ist die Summe der Flüsse der Schenkel II und III. Im oberen oder unteren Knotenpunkt ist

$$\Phi_I = \Phi_{II} + \Phi_{III} = 40000\ \text{M} + 24000\ \text{M} = 64000\ \text{M}.$$

Die Induktion des Schenkels I hat also den Wert

$$B_I = \frac{\Phi_I}{F_I} = \frac{64000\ \text{M}}{4\ \text{cm}^2} = 16000\ \text{G}.$$

Hierzu wird ein $H_I = 36\,\text{A/cm}$ benötigt.

Die für den Schenkel I aufzuwendende magnetomotorische Kraft kann nach dem Durchflutungsgesetz entweder für den Kreis I–II oder für den Kreis I–III berechnet werden:

$$\Theta = H_I\, s_I + H_{II}\, s_{II} = H_I\, s_I + H_{III}\, s_{III} = 36\,\text{A/cm} \cdot 26\ \text{cm} + 3{,}2\,\text{A/cm} \cdot 26\ \text{cm}$$
$$= (936 + 83)\ \text{A} = 1019\,\text{A}.$$

Die erforderliche Stromstärke beträgt

$$i = \frac{1019\,\text{A}}{100} = 10{,}19\,\text{A}.$$

Beispiel 7

Wie groß ist die Induktion in einem Luftspalt von 0,1 cm im Schenkel I, wenn die Spule mit dem nach Beispiel 6 errechneten Strom gespeist wird? (Ein äquivalenter elektrischer Kreis ist in Abb. 51 gezeichnet.)

Diese Aufgabe kann durch wiederholte Versuche oder graphisch gelöst werden. Es ist anzunehmen, daß sich die Induktion verringert. Es werden des-

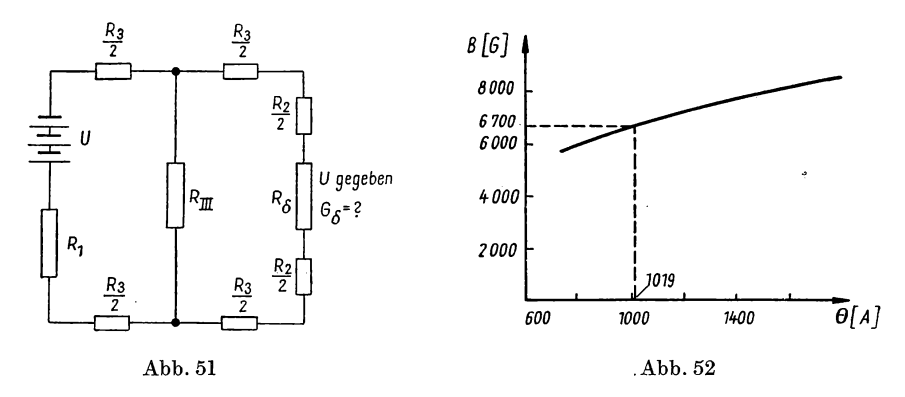


Abb. 51 Abb. 52

halb einige Induktionswerte unterhalb 10000 Gauß betrachtet. Die diesen Werten entsprechende Durchflutung wird berechnet. Die so gewonnenen Punkte werden graphisch aufgetragen. Aus der dadurch erhaltenen Magnetisierungskurve des Kreises $B_{II} = f(\Theta_I)$ wird zum gegebenen Θ_I das gesuchte B_{II} abgelesen.

$$s_I = 26\ \text{cm}, \quad s_{II} = 26\ \text{cm}, \quad s_{III} = 8\ \text{cm},$$

$$F_I = F_{II} = 4\ \text{cm}^2, \quad F_{III} = 2\ \text{cm}^2.$$

Die Kernteile I und II sind aus Dynamoblech, der Kernteil III aus Transformatorenblech.

Tabelle 2

B_{II} G	$H_{II\delta}$ A/cm	H_{IIe} A/cm	U_{II} A	H_{III} A/cm	B_{III} G	Φ_{III} M	Φ_{II} M	Φ_I M	B_I G	H_I A/cm	U_I A	Θ_I A
8000	6400	2	640 + 52	86,5	16200	32400	32000	64400	16100	38	990	1680
7000	5600	1,7	560 + 44	75	15900	31800	28000	59800	14950	20,5	530	1130
6000	4800	1,35	480 + 35	64,5	15600	31200	24000	55200	13800	11	286	800

Die Induktion des Luftspaltes beträgt bei der gegebenen Durchflutung $\Theta_I = 1019\,\text{A}$ nach Abb. 52: $B_{II} = 6700$ Gauß.

Beispiel 8

Welche Größe muß die Durchflutung des Schenkels I haben, damit im Schenkel II ein Fluß von $\Phi = 40000$ M entsteht? Dabei soll berücksichtigt werden, daß der mittlere Schenkel oben und unten mit einem Luftspalt von je 0,01 cm eingesetzt ist. Die Streuung wird vernachlässigt.

Diese Aufgabe kann ebenfalls durch wiederholte Versuche oder graphisch gelöst werden. Die Lösung erfolgt so, daß im mittleren Schenkel verschiedene Werte der Induktion angenommen werden. Damit wird jeweils die magnetische Spannung des mittleren Schenkels berechnet. Im rechten Fenster ist keine Durchflutung vorhanden, die magnetische Spannung des Weges II ist dementsprechend genauso groß. Damit kann die Induktion des Schenkels II bestimmt werden. Die Summe der Flüsse der beiden Schenkel ergibt den Fluß im Schenkel I. Dadurch ist auch die magnetische Spannung bestimmt und die notwendige Durchflutung entweder für den Weg I–II oder I–III gegeben. Auf diese Weise kann man die zusammenhängenden Werte des Flusses im Schenkel II und die Durchflutung des Schenkels I berechnen.

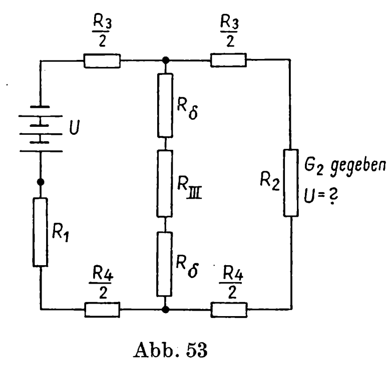


Abb. 53

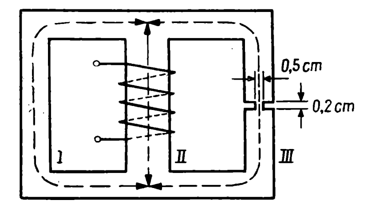
Zuerst wird gerechnet mit $B_{III} = 5000$ Gauß. Der erhaltene Wert für Φ_{II} liegt etwas zu hoch. Die übrigen Werte der Tabelle werden deshalb nicht weiter berechnet. Für $B_{III} = 4000$ Gauß folgt bereits ein zu kleiner Wert. Dementsprechend wird mit $B_{III} = 4500$ Gauß gerechnet. Der damit erhaltene Wert für Φ_{II} kann verwendet werden, da die Ungenauigkeit der Magnetisierungskurven bereits größer ist. Wird also im Schenkel II ein Fluß von 40000 M gewünscht, so muß $\Theta_I = 243$ A betragen. Durch eine Spule von 100 Windungen muß also ein Strom von 2,43 A fließen.

Beispiel 9

Der mittlere Schenkel des Eisenkernes aus Transformatorenblech in Abb. 54 hat einen Querschnitt von 3×2 cm². Die übrigen Abschnitte haben einen

Tabelle 3

B_{III} G	$H_{III\delta}$ A/cm	H_{IIIe} A/cm	$U_{III} = U_{II}$ A	H_{II} A/cm	B_{II} G	Φ_{II} M	Φ_{III} M	Φ_I M	B_I G	H_I A/cm	U_I A	Θ_I A
5000	4000	1,35	80 + 10,8	3,5	10300	41200						
4000	3200	1,2	64 + 9,6	2,8	9650	38600						
4500	3600	1,3	72 + 10,4	3,2	10050	40200	9000	49200	12300	625	163	243



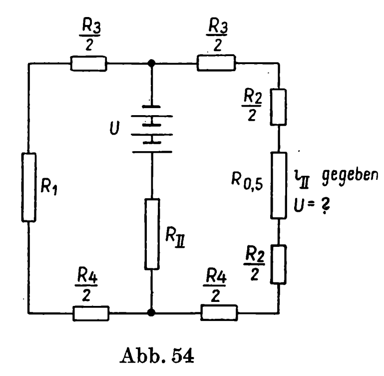


Abb. 54

Querschnitt von $2 \times 2\ \text{cm}^2$. Die eingezeichneten mittleren Längen der Kraftlinien betragen $s_{\text{I}} = s_{\text{III}} = 26$ cm und $s_{\text{II}} = 6$ cm. Schenkel III besitzt eine 0,5 cm breite und 0,2 cm lange Verengung, damit der Fluß einen annähernd konstanten Wert behält.

Wie verändert sich der Fluß von Schenkel III als Funktion der Durchflutung, und wie groß muß der in der Spule mit 100 Windungen fließende Strom sein, damit ein Fluß von $\Phi_{\text{II}} = 65000$ M erzeugt wird? Die Streuung wird dabei vernachlässigt.

Die Aufgabe wird nach Abb. 55 graphisch gelöst. Im I. und II. Kreis werden die Flußwerte angenommen und die dazugehörenden magnetischen Spannungen bestimmt. Dann werden die Kurven $\Phi_{\text{I}} = f(U_{m\text{I}})$ und $\Phi_{\text{III}} = f(U_{m\text{III}})$ gezeichnet. Die Summe der Flüsse Φ_{I} und Φ_{III} ist gleich dem Fluß Φ_{II} im mittleren Schenkel. Addiert man also die den gleichen magnetischen Spannungen entsprechenden Werte von Φ_{I} und Φ_{III}, so ergibt sich die dadurch gewonnene Kurve Φ_{II} als Funktion der magnetischen Spannung $U_{m\text{I}} = U_{m\text{III}}$. Zu $U_{m\text{I}} = U_{m\text{III}}$ muß noch die auf den mittleren Schenkel entfallende magnetische Spannung $U_{m\text{II}}$

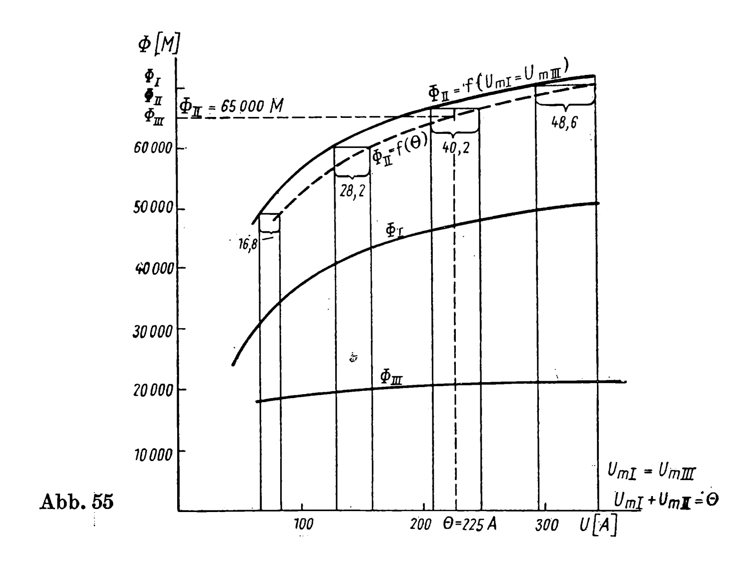


Abb. 55

addiert werden. Aus der Kurve $\Phi_{II} = f(U_{mI} + U_{mII}) = f(\Theta)$ kann zu einem gegebenen Φ_{II} der entsprechende Wert der Durchflutung Θ entnommen werden.

Zuerst wird angenommen, daß sich der gesuchte Fluß im mittleren Schenkel Φ_{II} zwischen den Zweigen I und III im Verhältnis der Mindestquerschnitte verteilt:

$$\frac{\Phi_I}{\Phi_{III}} = \frac{2 \cdot 2\ \mathrm{cm}^2}{0{,}5 \cdot 2\ \mathrm{cm}^2} = 4,$$

$$\Phi_I \approx 4\Phi_{III}.$$

Da $\Phi_I + \Phi_{III} = \Phi_{II}$ ist, ergibt sich

$$\Phi_I + \frac{\Phi_I}{4} = \Phi_{II}; \quad \Phi_I = 0{,}8\,\Phi_{II} = 52000\ \mathrm{M}.$$

Tabelle 4

Φ_I M	B_I G	H_I A/cm	$H_I s_I$ A
50000	12500	12,5	325
48000	12000	10	260
45000	11250	7,2	187
40000	10000	4,7	122
32000	8000	2,7	70,1
24000	6000	1,75	45,4

Tabelle 5

Φ_{III}	21000	20800	20400	20000	19000	18000	M
B_{III}	5250	5200	5100	5000	4750	4500	G
$B_{III}^{0,5}$	21000	20800	20400	20000	19000	18000	G
H_{III}	1,5	1,48	1,45	1,4	1,25	1,18	A/cm
$H_{III}^{0,5}$	1600	1270	850	660	390	230	A/cm
$H_{III} s_{III}$	39	38,4	37,7	35,4	32,5	30,7	A
$H_{III}^{0,5} \cdot 0{,}2$ cm	320	254	170	132	78	46	A
$\sum_{\varkappa} H_{\varkappa} s_{\varkappa} = U_{mIII}$	359	292,4	207,7	167,4	120,5	76,7	A

Tabelle 6

$U_{mI} = U_{mIII}$	67	130	207	292	A
Φ_{II}	49000	60000	66300	70000	M
B_{II}	8170	10000	11050	11650	G
H_{II}	2,8	4,7	6,7	8,1	A/cm
$U_{mII} = H_{II} s_{II}$	16,8	28,2	40,2	48,6	A
$\Theta = U_{mII} + U_{mI}$	83,8	158,6	247,2	340,6	A

Φ_I wird zu 50000 M angenommen und die Tabelle 4 berechnet. In ihrer Mitte steht $\Phi_I = 45000$ M. Dazu gehört $\Phi_{III} = \Phi_{II} - \Phi_I = 20000$ M. Mit diesem Wert wird zuerst die 4. Spalte der Tabelle 5 berechnet. Die kleineren und größeren Φ_{III}-Werte werden so gewählt, daß die entsprechenden magnetischen Spannungen ungefähr den gleichen Bereich umfassen wie den von Φ_I. $U_{mI} = U_{mIII}$ und Φ_{II} werden aus dem Diagramm entnommen. Aus der Kurve $\Phi_{II} = f(U_{mIII} + U_{mI}) = f(\Theta)$ ergibt sich die zu $\Phi_{II} = 65000$ M gesuchte Durchflutung Θ zu 225 A. Die benötigte Stromstärke wird

$$i = \frac{\Theta}{w} = \frac{225\,\text{A}}{100} = 2{,}25\,\text{A}.$$

Beispiel 10

Die Daten des magnetischen Kreises eines Gleichstrom-Nebenschluß-Generators betragen bei normaler Durchflutung:

	Induktion B Gauß	Eisen-weglänge s cm	Quer-schnitt F cm²	Material
Zahn in $^1/_3$ Höhe vom Fuß	18000	2,9	84	Dynamo-blech
Ankerkern	13000	6,3	2×58	Dynamo-blech
Pol	15000	10,5	115	Dynamo-blech
Ständerjoch	12000	9,7	2×72	Gußeisen

Wie groß ist die im Anker induzierte Spannung, wenn die Durchflutung unterbrochen wird und die vierpolige Maschine, deren Wellenwicklung aus $z = 282$ Leitern besteht, mit einer Nenndrehzahl $n = 1450$ U/min läuft?

Der ideale Polbogen ist $b_i = 14$ cm lang; die ideale Ankerlänge beträgt $s_i = 16$ cm. Im unerregten Zustand wird die Streuung vernachlässigt.

Bei der Berechnung der magnetischen Spannung, die auf die Zähne elektrischer Maschinen entfällt, wird die Feldstärke am Fuß, in der Mitte und am Kopf bestimmt. Mit dem nach der SIMPSONschen Regel berechneten Mittelwert wird dann weitergerechnet. Bei schwach trapezförmigen Zähnen oder zur Überschlagsrechnung genügt es, die mittlere Feldstärke von der Induktion für $^1/_3$ der Höhe von der engsten Stelle aus zu berechnen. Nach Unterbrechung der Durchflutung liefert der remanente Magnetismus der Eisenteile die magnetische Spannung des Luftspaltes. Die Aufgabe wird zweckmäßig graphisch gelöst. Von den Hysteresisschleifen des Dynamoblechs (Abb. 56) bzw. des Gußeisens (Abb. 57) wird diejenige ausgewählt, deren Spitze der Induktion des betreffenden Teiles entspricht. Bei dazwischenliegenden Werten wird interpoliert. Die Induktion im Ankerkern beträgt z. B. vor der Unterbrechung der

Durchflutung 13000 Gauß. Nach Beendigung der Erregung tritt im Ankerkern und in den übrigen Teilen des magnetischen Kreises Entmagnetisierung ein. Diese folgt dem abfallenden Zweig der Hysteresisschleife des Dynamoblechs,

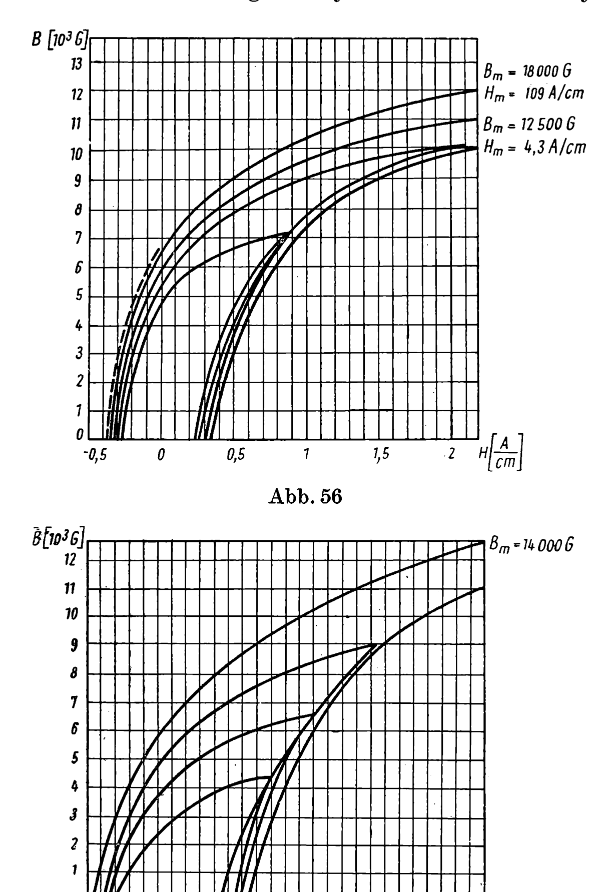


Abb. 56

Abb. 57

deren Spitze bei $B_m = 13000$ Gauß liegt. In der Abb. 56 ist diese Hysteresisschleife nicht eingezeichnet. Sie verläuft etwas über der eingezeichneten Schleife, die zur Spitze $B_m = 12500$ Gauß und $H_m = 4{,}3$ A/cm gehört. Sie kann ohne weiteres durch Interpolation eingezeichnet werden. (Die Spitze liegt außerhalb des in Abb. 56 gezeichneten Bereichs.) Die Kurve, die die Abhängigkeit zwischen der Induktion der Remanenz und der koerzitiven Feld-

stärke darstellt, wird in ein Diagramm $\Phi_a = f(U_{ma})$ umgezeichnet, indem die Werte der Induktion mit dem Ankerquerschnitt $F_a = 2 \times 58\ \mathrm{cm}^2$ und die Feldstärkewerte mit der mittleren Eisenweglänge des Ankers $s_a = 6{,}3$ cm multipliziert werden. Die neue Kurve geht vom Punkt $\Phi_{ra} = B_{ra} \cdot F_a = 5900\,\mathrm{G} \cdot 116\ \mathrm{cm}^2 = 0{,}684 \cdot 10^6\ \mathrm{M}$ aus und mündet im Punkt $U_{ka} = H_{ka} \cdot s_a = -0{,}32\ \mathrm{A/cm} \cdot 6{,}3\ \mathrm{cm} = -2\,\mathrm{A}$.

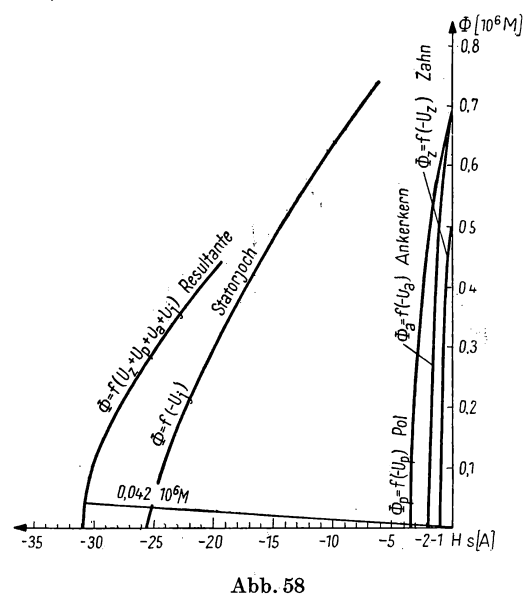


Abb. 58

Auf gleiche Weise werden die fallenden Kurvenzweige für den Zahn, den Pol und das Statorjoch (Abb. 58) gezeichnet. Bei Vernachlässigung der Polstreuung ist der Fluß in jedem Abschnitt gleich, so daß die zu gleichen Flüssen gehörenden U_m-Werte addiert werden können. Daraus ergibt sich die resultierende Kurve $\Phi = f\left(\sum_{\varkappa} U_{m\varkappa}\right)$.

Der Schnittpunkt dieser Kurve mit der Luftspaltgeraden (vgl. Beispiel 20 und Abb. 74) liefert den gesuchten Fluß. Der Fluß im Luftspalt beträgt

$$\Phi_\delta = b_i \cdot s_i \cdot \mu_0 H = b_i \cdot s_i \cdot \mu_0 \frac{H \cdot \delta}{\delta} = 14\ \mathrm{cm} \cdot 16\ \mathrm{cm} \cdot 1{,}256\ \frac{\mathrm{G\,cm}}{\mathrm{A}} \cdot \frac{U_\delta}{0{,}2\ \mathrm{cm}}$$
$$= 14000\ \frac{U_\delta}{\mathrm{A}}\ \mathrm{M}.$$

Es genügt, einen Punkt dieser Geraden zu bestimmen. Zu $U_\delta = 20\,\mathrm{A}$ gehört

$$\Phi = 1400 \cdot 20\ \mathrm{M} = 0{,}028 \cdot 10^6\mathrm{M}.$$

Die Verbindung dieses Punktes mit dem Ursprung ist die Gerade des Luftspaltes $\Phi = f(U_\delta)$. Sie schneidet die Resultante $\Phi = f\left(\sum_\varkappa U_{m\varkappa}\right)$ im Punkte $\Phi = 0{,}042 \cdot 10^6$ M. Das ist gerade der Fluß, den der remanente Magnetismus des Kreises im Luftspalt aufrechterhält, da hier $\sum_\varkappa U_{m\varkappa} = U_\delta$ ist. Das Statorjoch trägt hierzu erheblich bei. Durch den Einfluß des remanenten Flusses wird im Anker die elektrische Spannung

$$U = z \cdot \frac{p}{a} w \Phi_a = 282 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1450}{60} \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}042 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Vs} = 5{,}73\,\mathrm{V}$$

induziert. Die Zahl der parallelen Zweige a ist bei Wellenwicklung 1. Wird jetzt der Nebenschlußkreis zu den Bürsten geschaltet, so fließt hierin infolge der remanenten Spannung ein Strom. Der gesamte Widerstand der in Reihe geschalteten Nebenschlußwicklungen beträgt $R = 76{,}5\,\Omega$ und die Windungszahl je Pol $w = 1530$. Die Spannung U erzeugt dann in den Erregerwicklungen je Pol eine Durchflutung

$$\Theta = i \cdot w = \frac{U}{R} w = 110\,\mathrm{A}.$$

Diese remanente Durchflutung erzeugt nach dem dynamoelektrischen Prinzip im Nebenschlußgenerator einen Induktionsfluß. Dieses Beispiel sollte die Rechenmethode veranschaulichen. Die Rechnung selbst hat, abgesehen von ihrem didaktischen Wert, keine unmittelbare praktische Bedeutung.

Beispiel 11

In Abb. 59 ist ein Zahn und eine Nut einer Gleichstrommaschine dargestellt. Die Induktion im Luftspalt beträgt 9000 Gauß. Wie groß ist die Feldstärke im Fuß des Zahnes, wenn der Füllfaktor des Eisens 0,95 beträgt?

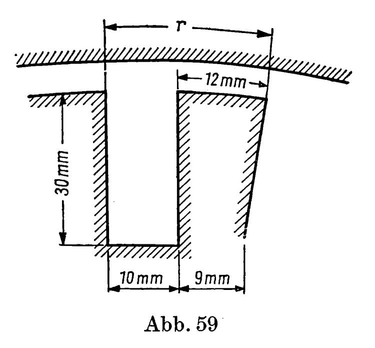


Abb. 59

Unter Füllfaktor wird das Verhältnis des wirksamen Eisenquerschnittes zum gesamten geometrischen Querschnitt des aus lackisolierten Blechen geschichteten Eisenvolumens verstanden. An dem gezeichneten Bogen tritt an der Nutteilung in den Anker in 1 cm Länge in axialer Richtung ein Fluß von $\Phi = 2{,}2\,\mathrm{cm}^2 \cdot 9000\,\mathrm{G} = 19800$ M ein. Dieser verteilt sich auf den parallelgeschalteten Zahn und die Nut im Verhältnis der Leitfähigkeiten. Die Permeabilität des Zahnes ist jedoch nicht bekannt, da sein Fluß und seine Induktion noch unbekannt sind.

Die Aufgabe wird graphisch gelöst. Der Gesamtfluß ist die Summe der Flüsse im Eisen und in der Nut

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_l;$$

Φ_l ändert sich linear mit der Feldstärke; Φ_e folgt der Magnetisierungskurve. Da die Magnetisierungskurven nicht für den Fluß, sondern für die Induktion angegeben sind, wird die Gleichung durch den Zahnquerschnitt dividiert,

$$\frac{\Phi}{F_e} = \frac{\Phi_e}{F_e} + \frac{\Phi_l}{F_e}$$

oder

$$B' = B_e + \frac{F_l}{F_e} \cdot \mu_0 H_e.$$

$B' = \dfrac{\Phi}{F_e}$ ist eine imaginäre Induktion, die mit B_e identisch wäre, wenn der gesamte Fluß im Zahn verlaufen würde. Da die tangentiale Komponente der Feldstärke an der Grenzfläche Luft–Eisen stetig ist, kann näherungsweise angenommen werden, daß die Feldstärke in Luft und im Eisen entlang der ein-

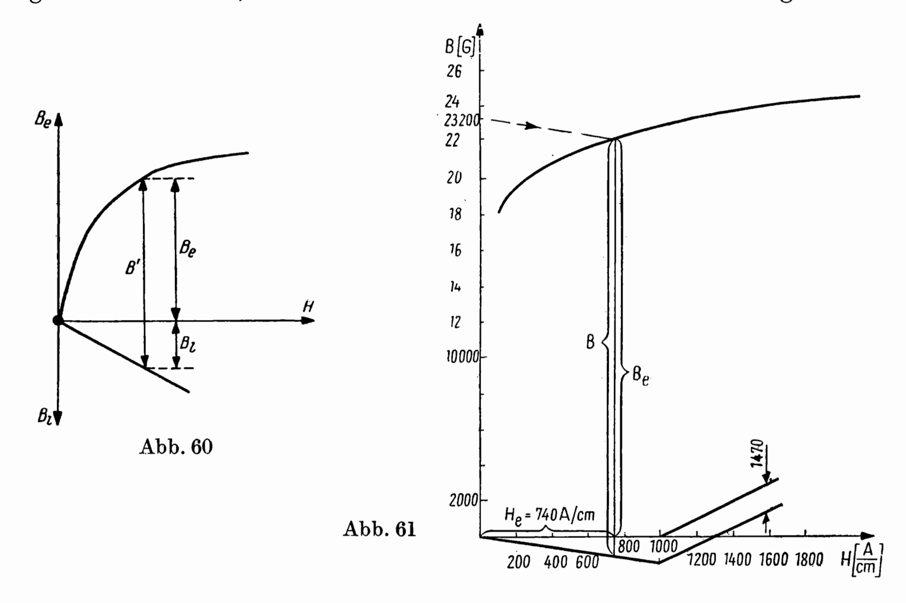


Abb. 60

Abb. 61

zelnen Querschnitte dieselbe ist. Wenn demnach in Abb. 60 die Induktion im Eisen nach oben und die Induktion in Luft nach unten aufgetragen wird und die so gewonnenen Punkte auf den beiden Induktionskurven miteinander verbunden werden, kann die zum bekannten B' gehörende Induktion B_e im Eisen entnommen werden.

Einer Feldstärke $H = 1000$ A/cm entspricht in Luft eine Induktion

$$\frac{F_l}{F_e} \cdot \mu_0 H = \frac{1 \cdot 1}{0{,}9 \cdot 1 \cdot 0{,}95} \cdot 1{,}256 \cdot 1000\ \text{G} = 1470\ \text{G},$$

und damit kann die schräge Gerade gezeichnet werden (Abb. 61).

Für B' errechnet man

$$B' = \frac{\Phi}{F_e} = \frac{19800}{0{,}9 \cdot 1 \cdot 0{,}95}\ \mathrm{G} = 23200\ \mathrm{G}.$$

Die Parallele zur Luftgeraden durch diesen Wert auf der B-Achse schneidet die Induktionskurve des Eisens in B_e. Die zugehörige Feldstärke im Fuß des Zahnes beträgt

$$H_e = 740\ \mathrm{A/cm}.$$

Beispiel 12

Längs des Joches eines Induktionsmotors (Linie *a–a* in Abb. 62) treten die Kraftlinien rechts und links von *b* in sinusförmiger Verteilung ein bzw. aus. Entlang der neutralen Zone (Gerade *b–b*) ist die Verteilung des Flusses gleichmäßig, und die Induktion beträgt 14500 Gauß. Wie groß ist die auf die Länge *s* entfallende magnetische Spannung, wenn als Material Dynamoblech verwendet wird?

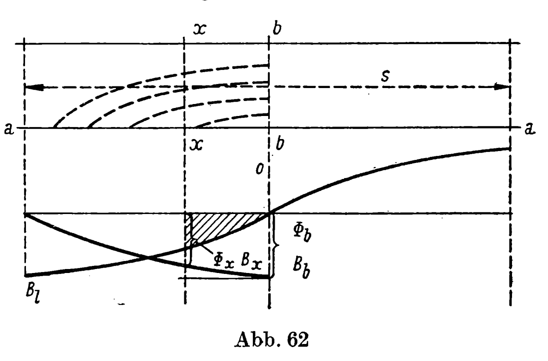


Abb. 62

Wegen der Symmetrie genügt es, die linke Seite zu betrachten. Von der Linie *b–b* nach links gehend, treten die Kraftlinien längs der Geraden *a–a* nach einer Sinus-Funktion aus dem Eisen. Der Fluß, der bis zur Senkrechten *x–x* das Eisen verläßt, ist dem gestrichelten Flächeninhalt proportional. Der Fluß Φ_b verringert sich also entsprechend der Integralkurve von B_l auf Φ_x. Nimmt man eine annähernd gleichmäßige Verteilung der Induktion in senkrechter Richtung entlang *x–x* an, so vermindert sich auch die Induktion im Eisen links von der Linie *b–b* proportional mit dem Fluß nach einem Cosinusgesetz. In einigen Punkten wird für einige Winkelwerte die Induktion berechnet. Aus der Magnetisierungskurve werden dann die zugehörigen Feldstärkewerte entnommen:

$$B_{0^\circ} = 14500\ \mathrm{G} = 14500\ \mathrm{G}; \quad H_{0^\circ} = 16\ \mathrm{A/cm};$$

$$B_{15^\circ} = 14500 \cdot 0{,}964\ \mathrm{G} = 14000\ \mathrm{G}; \quad H_{15^\circ} = 12\ \mathrm{A/cm};$$

$$B_{30^\circ} = 14500 \cdot 0{,}866\ \mathrm{G} = 12560\ \mathrm{G}; \quad H_{30^\circ} = 6{,}6\ \mathrm{A/cm};$$

$$B_{45^\circ} = 14500 \cdot 0{,}707\ \mathrm{G} = 10270\ \mathrm{G}; \quad H_{45^\circ} = 3{,}4\ \mathrm{A/cm};$$

$$B_{60^\circ} = 14500 \cdot 0{,}5\ \mathrm{G} = 7250\ \mathrm{G}; \quad H_{60^\circ} = 1{,}7\ \mathrm{A/cm};$$

$$B_{75^\circ} = 14500 \cdot 0{,}259\ \mathrm{G} = 3760\ \mathrm{G}; \quad H_{75^\circ} = 0{,}8\ \mathrm{A/cm}.$$

Zeichnet man die Änderung der Feldstärke längs des Umfanges, erhält man die Darstellung in Abb. 63. A sei die Fläche unter der Kurve. Zeichnet man ein flächengleiches Rechteckt $\frac{\pi}{2} \cdot H_A = A$, dann ist

$$H_A = \frac{A}{\frac{\pi}{2}} = 5{,}4 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}},$$

und die gesuchte magnetische Spannung

$$U_m = H_A \cdot s = 4{,}5 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}} \cdot s.$$

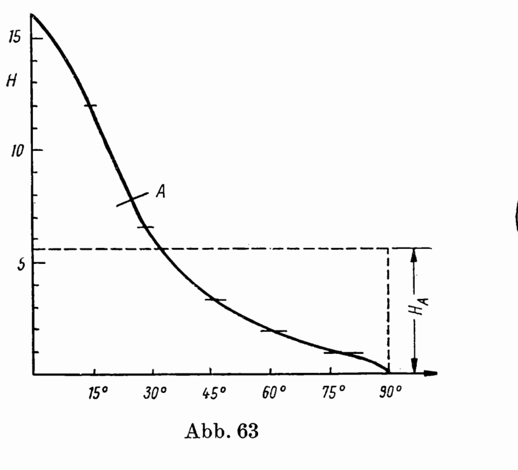


Abb. 63

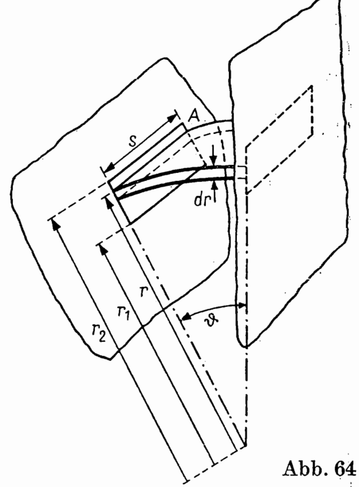


Abb. 64

Beispiel 13

Zwei unendlich große ebene Eisenflächen sind unter dem Winkel ϑ zueinander geneigt (Abb. 64). Es soll die magnetische Leitfähigkeit zwischen den Rechtecken A, die auf den Eisenflächen einander gegenüberliegen, berechnet werden. Zwischen den Eisenflächen befindet sich Luft.

Die Leitfähigkeit der elementaren Schicht mit der Dicke dr, die zwischen den Halbmessern r und $r + dr$ liegt, beträgt

$$d\Lambda = \frac{\mu_0 s \, dr}{\vartheta r}.$$

Integration von r_1 bis r_2 liefert die Leitfähigkeit des gegebenen Feldabschnittes.

$$\Lambda = \frac{\mu_0 s}{\vartheta} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 s}{\vartheta} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Beispiel 14

Es soll die magnetische Leitfähigkeit eines halbzylindrigen Feldabschnittes berechnet werden, der zwischen den im Abstand δ befindlichen Eisenkanten liegt (Abb. 65).

Die Länge des Weges, der in Höhe der Halbierungslinie der Vertikalabschnitte verläuft, sei $\bar{h}$. In der Zeichnung gemessen, beträgt sie

$$\bar{h} = 1{,}22 \cdot \delta .$$

Der mittlere Querschnitt ist

$$\bar{F} = \frac{v}{\bar{h}} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{\delta^2\pi}{4}\,s}{1{,}22\,\delta} = 0{,}323\,\delta \cdot s .$$

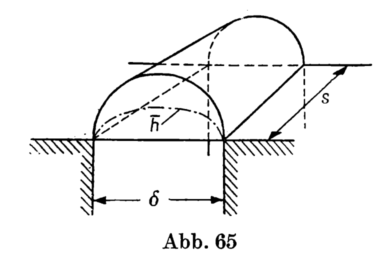


Abb. 65

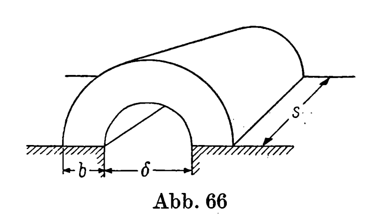


Abb. 66

Dabei bedeutet v das Volumen des Feldabschnittes. Für die Leitfähigkeit gilt

$$\Lambda = \frac{\mu_0 \bar{F}}{\bar{h}} = \frac{\mu_0 \cdot 0{,}323 \cdot \delta \cdot s}{1{,}22\,\delta} = 0{,}26\,\mu_0 s .$$

Die Berechnung ist theoretisch unrichtig, weil an den dimensionslosen geometrischen Kanten die Leitfähigkeit auf Null absinkt. In der Praxis liefert diese Methode, besonders bei der Berechnung der Streuung von Magneten, brauchbare Ergebnisse.

Beispiel 15

Man berechne die magnetische Leitfähigkeit eines halbringförmigen Feldabschnittes mit der Breite b, der den im Beispiel 14 angegebenen Halbzylinder umgibt (Abb. 66).

Nach der Leitfähigkeitsformel gilt angenähert

$$\Lambda = \frac{\mu_0 F}{\bar{h}} \approx \frac{\mu_0 \cdot b \cdot s}{\frac{(\delta + s) \cdot \pi}{2}}$$

oder, genauer, auf Grund des Ergebnisses von Beispiel 13

$$\Lambda = \frac{\mu_0 s}{\vartheta} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\mu_0 s}{\pi} \ln \frac{\frac{\delta + 2 \cdot b}{2}}{\frac{\delta}{2}} = \frac{\mu_0 s}{\pi} \ln \frac{\delta + 2b}{\delta} .$$

Beispiel 16

Man berechne die magnetische Leitfähigkeit eines Luftspaltes der Länge s zwischen zwei exzentrisch ineinandergelegten, unendlich langen Eisenzylindern.

Zuerst werden zwei parallele Walzen betrachtet. Da die Ableitung der Lösung ziemlich langwierig ist, wird das Endergebnis aus der Theorie des elektrischen Feldes übernommen. Das Kraftlinienbild des Magnetfeldes zwischen zwei parallelen Eisenzylindern gleicht dem Bild des elektrischen Feldes zwischen zwei Metallzylindern. Bei der Berechnung der magnetischen Leitfähigkeit zwischen zwei Eisenwalzen kann die Formel für die Kapazität zwischen den Metallzylindern angewendet werden (Lit. V [1], S. 43). Die Kapazität zweier kreisförmiger Zylinder verschiedenen Halbmessers ist

$$C = \frac{\varepsilon \cdot s}{2 \ln \dfrac{d^2 - (r_2 - r_1)^2 + \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 - d^2)^2 - 4 r_1^2 r_2^2}}{d^2 - (r_2 - r_1)^2 - \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 - d^2)^2 - 4 r_1^2 r_2^2}}}.$$

Die Bedeutung der Buchstaben ist aus Abb. 67 ersichtlich. Setzt man

$$d^2 - r_2^2 - r_1^2 = A \quad \text{und} \quad 2 r_1 r_2 = B,$$

dann wird der Ausdruck hinter dem Logarithmus im Nenner

$$\frac{A + B + \sqrt{A^2 - B^2}}{A + B - \sqrt{A^2 - B^2}} = \frac{A}{B} + \sqrt{\frac{A^2 - B^2}{B^2}}.$$

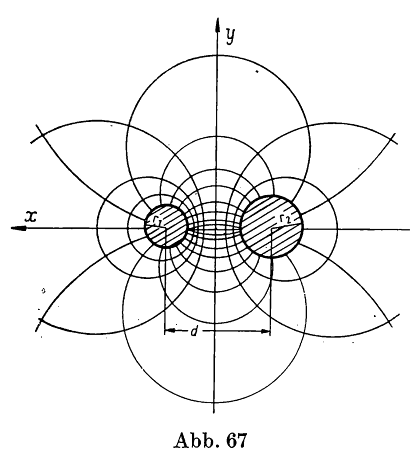


Abb. 67

Analog findet man für die magnetische Leitfähigkeit des Feldstückes zwischen den Abschnitten s der zwei Eisenwalzen in rationalisierter Form

$$\Lambda = \frac{2 \mu_0 \pi s}{\ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)}$$

mit

$$u = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2 r_1 r_2}.$$

d ist der Abstand der Zylinderachsen. Das Flußbild der Anordnung ist in Abb. 67 dargestellt. Die Flußlinien sind senkrecht auf die Zylinder auftreffende Kreise, deren Mittelpunkte auf der y-Achse liegen. Die Niveaulinien sind ebenfalls Kreise mit Mittelpunkten auf der x-Achse. Die Niveaulinien umgeben die Zylinder exzentrisch, und die Kraftlinien schneiden sich, wenn die Eisenwalzen verlassen werden, in zwei Punkten, die im elektrischen Feld den zwei parallelen elektrischen Achsen entsprechen. Die Flußlinien treffen überall

senkrecht auf die Niveaulinien. Es kann also jede Niveaulinie die Oberfläche einer Eisenwalze sein. Füllt man demnach einen von einer beliebigen Niveaulinie umrandeten Feldabschnitt mit Eisen aus, so ändert sich das Flußbild nicht, da die Oberfläche des Eisens ebenfalls eine Äquipotentialfläche ist, wenn die Permeabilität des Eisens als unendlich angenommen wird. Die abgeleitete Formel ist daher auch für die magnetische Leitfähigkeit eines Feldabschnittes zwischen zwei exzentrisch ineinandergelegten Zylindern (Abb. 68) gültig, wenn man

$$u = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2 r_1 r_2}$$

einsetzt.

Abb. 68

Beispiel 17

Es soll die magnetische Leitfähigkeit der in Abb. 69 gezeichneten Nut berechnet werden. Die Länge der Nut betrage $s = 20$ cm. Die Streuung des Zahnkopfes, also die über h_4 verlaufenden Kraftlinien, werden vernachlässigt.

Zunächst wird die Leitfähigkeit einer äquivalenten idealen Nut ermittelt. Dabei ist der am Boden der Ersatznut konzentrierte Leiter mit ebensoviel Kraftlinien verkettet wie der Leiter der tatsächlichen Nut. Die Permeabilität des Eisens wird zu unendlich angenommen, so daß die Kraftlinien horizontale Geraden sind, die senkrecht in das Eisen eintreten. Die auf das Eisen entfallende magnetische Spannung ist praktisch Null. Deshalb wird die von den Wegen I und II umschlossene Durchflutung ganz in dem auf die Luft entfallenden Abschnitt, zwischen den beiden Wänden der Nut, aufgenommen. In den Abschnitten h_2, h_3 und h_4 ruft der gesamte Strom die magnetische Spannung hervor. Der Fluß des Abschnittes h_2 ist

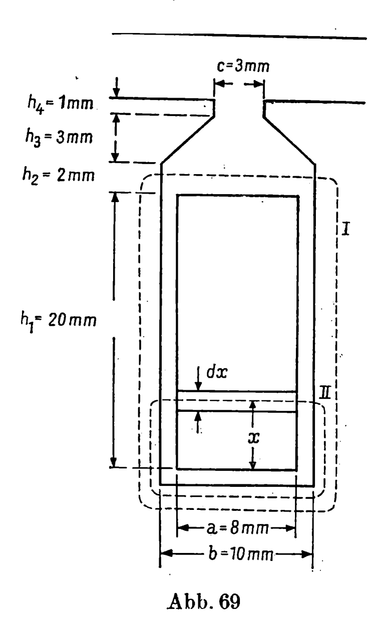


Abb. 69

$$\Phi_2 = H_2 \mu_0 F_2 = \frac{i}{b} \mu_0 s h_2,$$

der Fluß im Abschnitt h_4

$$\Phi_4 = i \mu_0 s \frac{h_4}{c}.$$

Die schrägen Kanten des Abschnittes h_3 können in guter Näherung durch Senkrechte in der Entfernung $\frac{c + b}{2}$ ersetzt werden. Dann ist

$$\Phi_3 = i \mu_0 s \frac{h_3}{\frac{c + b}{2}}.$$

Im Abschnitt h_1 wird aus der Zahl der verketteten Kraftlinien eine gleichwertige magnetische Leitfähigkeit berechnet. Die in verschiedenen Höhen liegenden Kraftlinien werden nur von der unter ihnen liegenden Durchflutung erzeugt. Durch die Flußröhre $s\,dx$, die im Abstand x vom Boden des Leiters in der Nut liegt, treten $d\Phi_1 = i \frac{x}{h_1 b} \cdot \mu_0 s\,dx$ Kraftlinien hindurch. Diese Flußröhre verbindet sich nur mit dem unter ihr liegenden $\frac{x}{h_1}$-ten Teil des Leiters. Die Verkettung, also der „elementare Spulenfluß", ist dann

$$d\Phi_{s1} = i \frac{x^2}{h_1^2} \frac{\mu_0 s}{b} dx .$$

Auf der gesamten Höhe h_1 beträgt die Verkettung

$$\Phi_{s1} = \int_0^{h_1} d\Phi_{s1} = i \frac{\mu_0 s}{b} \int_0^{h_1} \frac{x^2}{h_1^2} dx = i \frac{\mu_0}{b} \frac{h_1}{3} s .$$

Die so berechneten Flüsse sind parallelgeschaltet. Der gesamte Fluß, also die gesamte Verkettung der Nut, ist deshalb

$$\Phi_s = \Phi_{s1} + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 .$$

Da für einen einzigen Leiter $L = w^2 \Lambda = \Lambda$ gilt, erhält man für die magnetische Leitfähigkeit der idealen Nut

$$\begin{aligned} \Lambda = \frac{\Phi_s}{i} &= \mu_0 \left(\frac{h_1}{3b} + \frac{h_2}{b} + \frac{h_3}{\frac{c+b}{2}} + \frac{h_4}{c} \right) \cdot s \\ &= 1{,}256 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2}{3{,}1} + \frac{0{,}2}{1} + \frac{0{,}3}{0{,}65} + \frac{0{,}1}{0{,}3} \right) \cdot 20 \text{ H/cm} \\ &= 1{,}256 \cdot 33{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ H/cm} . \end{aligned}$$

Dieser äquivalente Leitwert interessiert dann, wenn in der Nut ein Wechselstrom fließt. Er dient dann zur Berechnung der dem Nutenstreufluß entsprechenden Induktivität und damit gleichzeitig zur Berechnung des induktiven Widerstandes und des Spannungsabfalles oder der induzierten Spannung bei der Kommutation.

Bei Synchronmaschinen fließt dagegen in den Rotornuten Gleichstrom. Hier soll der Nutenstreufluß und nicht die Verkettung des Flusses bestimmt werden. Dann ist der wahre und nicht der äquivalente Leitwert zu ermitteln. Der Fluß des untersten Nutenabschnittes beträgt

$$\Phi_1 = \int_0^{h_1} d\Phi_1 = \int_0^{h_1} i \frac{x}{h_1} \frac{s}{b} dx = i \mu_0 \frac{h_1}{2b} \cdot s .$$

Für die Flüsse der anderen Abschnitte gelten die gleichen Ausdrücke wie oben. Damit ist der wahre Leitwert der Nut

$$\Lambda = \mu_0 \left(\frac{h_1}{2b} + \frac{h_2}{b} + \frac{h_3}{\frac{c+b}{2}} + \frac{h_4}{c} \right) s$$

$$= 1{,}256 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2}{2{,}1} + \frac{0{,}2}{1} + \frac{0{,}3}{0{,}60} + \frac{0{,}1}{0{,}3} \right) 20 \text{ H/cm}$$

$$= 1{,}256 \cdot 39{,}9 \cdot 10^{-8} \text{ H/cm}.$$

Beispiel 18

Das Beispiel beschäftigt sich mit der praktischen Berechnung eines Elektromagneten. Hierzu sollen die Hauptabmessungen des in Abb. 70 skizzierten glockenförmigen Lastmagneten bestimmt werden. Der Magnet habe 10 t zu tragen. Der Luftspalt zwischen den Polflächen und der Last wird auf 2 mm geschätzt. Die Induktion im Luftspalt soll 8000 Gauß betragen. Das Fördergut ist in der Abbildung nicht dargestellt. Im Eisen sei eine Induktion von 13000 Gauß zulässig. Das Verhältnis der Querschnittsabmessungen der Spule wird zu $y = 2x$ gewählt. Der Füllfaktor, also das Verhältnis des Kupferquerschnittes zum Gesamtquerschnitt der Spule, sei 0,5. Die Stromdichte betrage 2 A/mm². Die auf das Eisen entfallende magnetische Spannung wird zu 10% der Spannung im Luftspalt und der Streufluß zu 25% des Nutenflusses geschätzt. Die Zugkraft ist

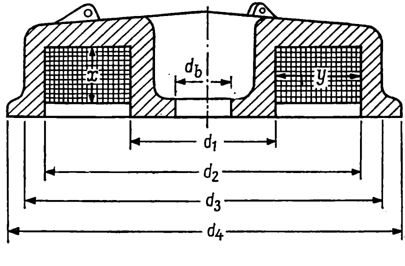


Abb. 70

$$P \approx \frac{1}{2} \frac{B^2 F}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{8^2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-16} \text{V}^2\text{s}^2\text{cm}^{-4} \cdot 2 F_p}{1{,}256 \cdot 10^{-8} \text{V s A}^{-1}\text{cm}^{-1}} = 0{,}51 \text{ Ws cm}^{-3} \cdot F_p.$$

Da 1 Ws/cm = 10,2 kg entspricht, ist

$$P = 10\,\text{t} = 10^4\text{kg} = 5{,}2 \text{ kg cm}^{-2} \cdot F_p.$$

Eine Polfläche muß deshalb einen Querschnitt

$$F_p = \frac{10}{5{,}2} \text{cm}^2 = 1925 \text{ cm}^2$$

besitzen. In der Praxis bedient man sich lieber der Zahlenwertgleichung

$$P\,[\text{kg}] = \left(\frac{B\,[\text{G}]}{5000} \right)^2 \cdot F\,[\text{cm}^2].$$

Hiernach errechnet sich der Querschnitt

$$2F_p = P\left(\frac{5000}{B}\right)^2 = 2 \cdot 1950 \text{ cm}^2$$

$$F_p = 1950 \text{ cm}^2.$$

Er ist in diesem Fall für die innere und äußere Polfläche gleich. Die Durchflutung ist

$$\Theta = 1{,}1\ U_{ml} = 1{,}1 \cdot 0{,}8 \frac{\text{A}}{\text{G} \cdot \text{cm}} \cdot \left(\frac{2\delta}{\text{cm}}\right) \text{cm} \left(\frac{B_l}{\text{G}}\right) \text{G}$$

$$= (1{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 2 \cdot 0{,}2 \cdot 8000) \text{ A} = 2820 \text{ A}.$$

Mit dem gegebenen Innendurchmesser $d_b = 15$ cm errechnet sich

$$F_p = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_b^2) = 1950 \text{ cm}^2.$$

Hieraus ergibt sich der Außendurchmesser der inneren Polfläche

$$d_1^2 = \frac{1950 \cdot 4}{\pi} \text{cm}^2 + 15^2 \text{cm}^2 = 2700 \text{ cm}^2,$$

$$d_1 = 52 \text{ cm}.$$

Für den gesamten Querschnitt der Spule wird unter Beachtung eines Füllfaktors von 0,5, da $\Theta = 0{,}5 \cdot F_s \cdot S$ ist,

$$F_s = \frac{\Theta}{S \cdot 0{,}5} = \frac{2820 \text{ A}}{2 \cdot 0{,}5 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}} = 2820 \text{ mm}^2 = 28{,}2 \text{ cm}^2.$$

Mit $y = 2x$ folgt

$$x \cdot y = x \cdot 2x = 28{,}2 \text{ cm}^2$$

und

$$x = 3{,}75 \text{ cm}, \quad y = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Damit ist der äußere Spulendurchmesser, also der Innendurchmesser des äußeren Pols, gefunden zu

$$d_2 = d_1 + 2y = 52 \text{ cm} + 15 \text{ cm} = 67 \text{ cm}.$$

Der Außendurchmesser wird ähnlich berechnet:

$$d_4^2 = \frac{1950 \cdot 4}{\pi} \text{cm}^2 + d_2^2 = \frac{1950\,\pi}{4} \text{cm}^2 + 67^2 \text{ cm}^2 = 6975 \text{ cm}^2,$$

$$d_4 = 83{,}5 \text{ cm}.$$

In Eisen beträgt der Fluß das 1,25fache des Flusses im Luftspalt. Es ist $\Phi_e = 1{,}25\,\Phi_l = 1{,}25 \cdot 8000 \text{ G} \cdot 1950 \text{ cm}^2 = 19\,500\,000 \text{ M}$. Mit $B_e = 13\,000$ Gauß

beträgt der erforderliche Querschnitt

$$F = \frac{\Phi_e}{B_e} = \frac{19{,}5 \cdot 10^6 \text{ M}}{13 \cdot 10^3 \text{ G}} = 1500 \text{ cm}^2 .$$

Für den Außendurchmesser gilt dann

$$d_3^2 = \frac{1500 \cdot 4}{\pi} \text{ cm}^2 + 67^2 \text{ cm}^2 = 6400 \text{ cm}^2$$

und

$$d_3 = 80 \text{ cm} .$$

Beispiel 19

Es soll die Durchflutung des im Beispiel 18 berechneten Magneten unter Berücksichtigung der Streuung kontrolliert werden. Der Streuungskoeffizient des Magneten soll berechnet werden.

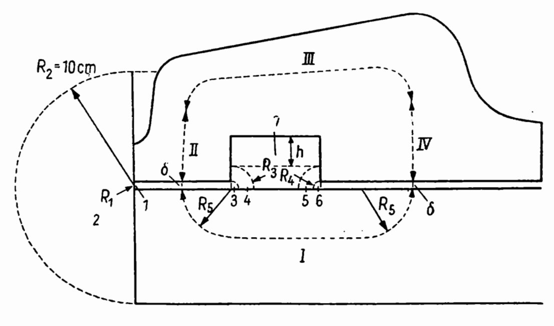


Abb. 71

Zuerst werden die Leitwerte der Streuung bestimmt, indem das wahre Flußbild durch einfache, leicht berechenbare geometrische Gebilde ersetzt wird. Die einzelnen Teile werden getrennt berechnet, und dann werden diese parallelgeschalteten Leitwerte der Streuung addiert. Entsprechend Abb. 71 werden die Bahnen der Streuflüsse in die einfachen Feldabschnitte 1 bis 7 eingeteilt. Die Leitfähigkeiten werden folgendermaßen berechnet:

1. In Beispiel 14 ist bereits eine solche Aufgabe gelöst worden. Dabei war

$$\Lambda = 0{,}26 \, \mu_0 \cdot s .$$

Hier ist $s = \pi \cdot d_4 = 3{,}14 \cdot 83{,}5 \text{ cm} = 262 \text{ cm}$.
Damit ergibt sich

$$\Lambda_1 = 0\;26 \cdot 1{,}256 \frac{\text{G}}{\text{A/cm}} \cdot 262 \text{ cm} = 86 \frac{\text{M}}{\text{A}} .$$

2. Nach Beispiel 15 ist

$$\Lambda_2 = \frac{\mu_0 s}{\vartheta} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Mit

$$s = 262\,\text{cm}, \quad R_1 = \frac{\delta}{2} = 0{,}1\,\text{cm}, \quad R_2 = \frac{\delta}{2} + 10\,\text{cm} = 10{,}1\,\text{cm}, \quad \vartheta = \pi$$

wird

$$\Lambda_2 = \frac{1{,}256 \cdot 262}{\pi} \ln \frac{10{,}1}{0{,}1} \frac{\text{M}}{\text{A}} = 483 \frac{\text{M}}{\text{A}}.$$

3. Der Feldabschnitt 3 entspricht der Hälfte des Weges von 1. Folglich ist seine Leitfähigkeit doppelt so groß:

$$\Lambda_3 = 0{,}52 \cdot \mu_0 s.$$

Dabei ist $s = \pi \cdot d_2 = 3{,}14 \cdot 67\,\text{cm} = 210\,\text{cm}$.
Damit wird

$$\Lambda_3 = 0{,}52 \cdot 1{,}256 \frac{\text{G} \cdot \text{cm}}{\text{A}} \cdot 210\,\text{cm} = 137 \frac{\text{M}}{\text{A}}.$$

4. Dieser Feldabschnitt entspricht der Hälfte von 2. Seine Leitfähigkeit hat wieder den doppelten Wert

$$\Lambda_4 = \frac{2\mu_0 s}{\pi} \ln \frac{R_3}{R_1}.$$

Die Streulinien treten entsprechend dem vereinfachten Flußbild ungefähr so lange in den vom Magneten zu tragenden Körper ein und nicht in den entgegengesetzten Pol, bis der Weg vom inneren Pol in die Armatur und von da in den äußeren Pol längs je eines Quadrantbogens kürzer ist als der Weg aus dem inneren Pol in den äußeren. Dies gilt, solange

$$R_3 \cdot \pi \leq \frac{d_2 - d_1}{2} \leq y \leq 7{,}5\,\text{cm}$$

ist.

Für R_3 ergibt sich

$$R_3 = \frac{7{,}5\,\text{cm}}{\pi} = 2{,}4\,\text{cm}.$$

Mit $s = \pi\, d_2 = 210\,\text{cm}$ erhält man

$$\Lambda_4 = \frac{2 \cdot 1{,}256 \dfrac{\text{G}\,\text{cm}}{\text{A}} \cdot 210\,\text{cm}}{\pi} \ln \frac{2{,}4}{0{,}2} = 416 \frac{\text{M}}{\text{A}}.$$

5. Hier wird analog wie bei 4 vorgegangen. Mit dem hier gültigen Wert von $s = \pi d_1 = 3{,}14 \cdot 52 = 163$ cm ergibt sich

$$\Lambda_5 = 326 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}.$$

6. Entsprechend der Rechnung für 3 ist

$$\Lambda_6 = 107 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}.$$

7. Die Höhe des Streulinienbildes beträgt $h = x - (R_3 - \delta) = (3{,}75 - 2{,}2)$ cm $= 1{,}5$ cm. Sind die Streulinien in senkrechter Richtung gleichmäßig verteilt, ergibt sich, mit einem mittleren Querschnitt gerechnet,

$$\Lambda_7 = \frac{\frac{(d_1 + d_2)\pi}{2} h \cdot \mu_0}{\frac{d_2 - d_1}{2}} = \frac{(d_1 + y)\pi h \mu_0}{y}$$

$$= 46{,}9 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}.$$

Nach Beispiel 16 genauer gerechnet wird

$$\Lambda_7 = \frac{2\pi \mu_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \cdot 1{,}256 \cdot 1{,}5}{\ln \frac{33{,}5}{26}} \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}$$

$$= 46{,}4 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}.$$

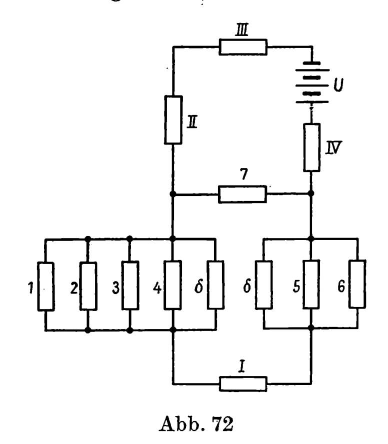


Abb. 72

Infolge der Änderung der Durchflutung ist nur die Hälfte dieser Leitfähigkeit wirksam. Entsprechend ändert sich die Durchflutung entlang Λ_5 und Λ_4. Die Streuung wird also etwas größer berechnet, als sie in Wirklichkeit ist. Damit ist eine gewisse Sicherheit vorhanden.

Die Nutzleitfähigkeit eines Luftspaltes beträgt

$$\Lambda_\delta = \frac{\mu_0 F}{\delta} = \frac{1{,}256 \cdot 1950}{0{,}2} \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}} = 12250 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}.$$

Das elektrische Ersatzschaltbild des Magneten ist in Abb. 72 angegeben. Man kann jetzt die Leitfähigkeit der Streuung der Abschnitte 1–2–3–4 und 5–6 addieren.

$$\Lambda_{1-2-3-4} = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4 = 1125 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}},$$

$$\Lambda_{5-6} = \Lambda_5 + \Lambda_6 = 433 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}.$$

Der Streuungskoeffizient des Magneten ist das Verhältnis des mit der Spule verketteten gesamten Flusses und des nutzbaren Flusses.

Es ist

$$\sigma = \frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\Lambda_\delta + \Lambda_{1-2-3-4}} + \dfrac{1}{\Lambda_\delta + \Lambda_{5-6}}} + \Lambda_7}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\Lambda_\delta} + \dfrac{1}{\Lambda_\delta}}} = 1{,}07\,.$$

Der in Reihe geschaltete Widerstand R_{I} wurde vernachlässigt, weil seine Leitfähigkeit Λ_{I} im Verhältnis zum Luftspalt sehr groß ist.

Der benötigte nutzbare Fluß des Luftspaltes beträgt

$$\Phi_{\delta,n} = 8000\ \mathrm{G} \cdot 1950\ \mathrm{cm}^2 = 15\,600\,000\ \mathrm{M}\,.$$

Der Gesamtfluß in Luft hat den Wert

$$\Phi_{\delta,g} = \frac{6500}{6120} \cdot 15\,600\,000\ \mathrm{M} = 16{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{M}\,.$$

Auf den Luftspalt entfällt also eine magnetische Spannung

$$U_{m\,\delta} = \frac{16{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{M}}{6500\ \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}} = 2550\ \mathrm{A}\,.$$

Der Fluß durch die Pole ist, wenn man die dazwischen austretenden Kraftlinien unberücksichtigt läßt, $\Phi_{\delta,g}$ und die Induktion im Pol

$$B_p = \frac{\Phi_{\delta,g}}{F_p} = \frac{16{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{M}}{1500\ \mathrm{cm}^2} = 11\,000\ \mathrm{G}\,.$$

Für Gußeisen ist $H_p = 10{,}3\ \mathrm{A/cm}$. Mit $s_p \approx 2 \cdot 4\,\mathrm{cm} = 8\ \mathrm{cm}$ wird

$$U_{m,p} = H_p \cdot s_p = 10{,}3\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}} \cdot 8\ \mathrm{cm} = 82{,}4\,\mathrm{A} = U_{\mathrm{II}} + U_{\mathrm{IV}}\,.$$

Durch die Lastarmatur tritt ebenfalls der Fluß $\Phi_{\delta,g}$. Die Höhe war zu 10 cm gewählt, wobei sie bei einem 10-t-Eisenblock natürlich viel größer ist. Wird der Querschnitt berücksichtigt, der von d_1 in der Entfernung $^1/_3\ (d_2 - d_1)$ liegt, wird

$$F_a = (52 + 5) \cdot \pi \cdot 10\,\mathrm{cm}^2 = 1790\,\mathrm{cm}^2\,,$$

$$B_a = \frac{16{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{M}}{1790\ \mathrm{cm}^2} = 9280\ \mathrm{G}\,.$$

Für Gußeisen ist $H_a = 8{,}3\,\mathrm{A/cm}$.

Mit

$$s_a \approx \frac{R_5 \cdot \pi}{2} + y + 3\,\text{cm} + \frac{R_5 \cdot \pi}{2} = \left(\frac{4\pi}{2} + 7{,}5 + 3 + \frac{4\pi}{2}\right)\text{cm} \approx 23\ \text{cm}$$

wird $U_{ma} = 8{,}3 \cdot 23\,\text{A/cm} \cdot \text{cm} = 191\,\text{A}$.

Der im Feldabschnitt 7 vorhandene Fluß Φ_7 wird von einer magnetischen Spannung

$$U_{m7} = U_{ma} + U_{m\delta} + U_{mp} = 191\,\text{A} + 2550\,\text{A} + 82\,\text{A} = 2823\,\text{A}$$

erzeugt:

$$\Phi_7 = \Lambda_7 \cdot U_{m7} = \frac{46{,}4}{2}\,\frac{\text{M}}{\text{A}} \cdot 2823\,\text{A} \approx 65\,600\,\text{M}.$$

Der Fluß im Joch beträgt

$$\Phi_j = \Phi_{\delta,g} + \Phi_7 \approx 16{,}666 \cdot 10^6\,\text{M}.$$

Bei Gleichheit des mittleren Querschnittes des Joches und der Pole gilt

$$B_j = \frac{\Phi_j}{F_j} = \frac{16{,}666 \cdot 10^6\,\text{M}}{1500\ \text{cm}^2} = 11\,100\,\text{G};$$

$$H_j = 10{,}5\,\frac{\text{A}}{\text{cm}}; \quad s_j \approx s_a = 23\,\text{cm};$$

$$U_{mj} = 10{,}5\,\frac{\text{A}}{\text{cm}} \cdot 23\,\text{cm} = 242\,\text{A}.$$

Die notwendige Gesamtdurchflutung ergibt sich nun zu

$$\Theta = U_{ma} + U_{m\delta} + U_{mp} + U_{mj} = 3065\,\text{A}.$$

Das ist der genauere Wert gegenüber dem nach Beispiel 18 ermittelten Wert von 2820 A.

Beispiel 20

In diesem Beispiel soll die praktische Durchführung der Berechnung eines Permanentmagneten gezeigt werden. Es werden die Daten von A. Th. Urk verwendet (Aufgabe 31).

Bei einem Magneten mit den in Abb. 73 angegebenen Abmessungen ist die Induktion im Luftspalt zu bestimmen. Der aktive Teil des Magneten wird von zwei stabförmigen Magnetstählen mit hoher Koerzitivkraft gebildet. Am einen Ende sind Weicheisenpole angebracht und am anderen wird der magnetische Kreis durch einen U-förmigen Weicheisenkörper geschlossen. Der abfallende Zweig der Hysteresisschleife des Magnetstahles ist zwischen der remanenten Induktion B_r und der Koerzitivkraft H_k aufgezeichnet. Die Feldstärke ist in Abb. 74 in Oerstedt angegeben. Wegen der Größe des Luftspaltes

kann die Streuung nicht vernachlässigt werden. Der Nutzfluß des Luftspaltes wird daher kleiner als der Fluß des Magnetstahles. Der Nutzfluß ist

$$\Phi_n = \frac{\Phi}{\sigma}.$$

Dabei ist σ der Streuungskoeffizient. Der Gesamtfluß ist die Summe des Nutzflusses und der Streuflüsse

$$\Phi = \Phi_n + \Phi_1 + \Phi_2.$$

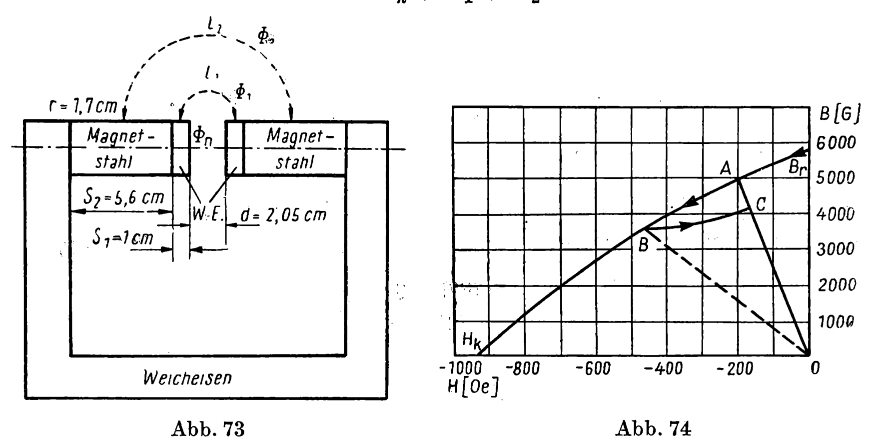


Abb. 73 Abb. 74

Φ_1 ist die Summe der aus den Polflächen, Φ_2 die Summe der aus der Mantelfläche des Magnetstahles austretenden Streulinien. Die magnetische Leitfähigkeit beider Abschnitte kann annähernd aus dem die Zylinderflächen im Halbkreis verbindenden Kraftlinienbild berechnet werden:

$$\Lambda_1' = \frac{\mu_0 F_1}{L_1} = \mu_0 \frac{2\pi r s_1}{\pi\left(\frac{d}{2} + \frac{s_1}{2}\right)} = \mu_0 \frac{4 s_1 r}{d + s_1},$$

$$\Lambda_2' = \frac{\mu_0 F_2}{L_2} = \mu_0 \frac{2\pi r s_2}{\pi\left(\frac{d}{2} + s_1 + \frac{s_2}{2}\right)} = \mu_0 \frac{4 s_2 r}{d + 2 s_1 + s_2}.$$

Diese Näherung wird zweckmäßig mit dem Faktor aus einem Modellversuch einer gleichförmigen Magnetanordnung korrigiert. Danach sind die tatsächlichen Leitfähigkeiten Λ_1 und Λ_2 das 4,14- bzw. 3,43fache der berechneten:

$$\Lambda_1 = 4{,}14 \cdot \mu_0 \frac{4 r s_1}{d + s_1},$$

$$\Lambda_2 = 3{,}43 \cdot \mu_0 \frac{4 r s_2}{d + 2 s_1 + s_2}.$$

Die Leitfähigkeit der Bahn des Nutzflusses hat den Wert

$$\Lambda_n = \frac{\mu_0 \pi r^2}{d}.$$

Multipliziert man die Leitfähigkeiten mit den entsprechenden magnetischen Spannungen, erhält man die jeweiligen Flüsse. Sind diese bekannt, kann der Streufaktor σ berechnet werden. Die magnetischen Spannungsabfälle, die auf die Abschnitte des Weicheisens entfallen, können vernachlässigt werden. Innerhalb des Magnetkreises gibt es keine Erregerströme. Bedeuten H_l die Feldstärke in Luft und H_e die mittlere Feldstärke im Magnetstahl, so ist

$$H_l \cdot d + H_e \cdot 2 s_2 = 0.$$

Daraus folgt

$$H_e \, 2 s_2 = -H_l \cdot d.$$

Das bedeutet, daß die magnetische Spannung des Luftspaltes vom permanenten Magneten geliefert wird. Die gesamte magnetische Spannung $H_e \cdot 2 s_2$ hält den Fluß des Luftspaltes aufrecht. Dieser ist gleich der gesamten Durchflutung. Auch die Streuung der Pole wird davon bestritten. Die Spannung fällt am Magneten auf den Wert Null ab. Es wird deshalb mit einer mittleren magnetischen Spannung $\frac{H_e \cdot 2 s_2}{2} = H_e \cdot s_2$ gerechnet. Das Verhältnis des Gesamtflusses zum Nutzfluß kann deshalb in folgender Form angegeben werden:

$$\sigma = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_n}{\Phi_n} = \frac{\Lambda_1 H_e \cdot 2 s_2 + \Lambda_2 H_e s_2 + \Lambda_n H_e 2 s_2}{\Lambda_n H_e 2 s_2}$$

$$= \frac{2\Lambda_1 + \Lambda_2 + 2\Lambda_n}{2\Lambda_n} = \frac{d}{\pi r}\left(2 \frac{8{,}28 s_1}{d + s_1} + 2 \frac{3{,}43 s_2}{d + 2 s_1 + s_2}\right) + 1$$

$$= 0{,}384\,(5{,}43 + 3{,}98) + 1 = 4{,}6.$$

Wird die Induktion im Eisen mit B bezeichnet, so gilt

$$B r^2 \pi = \mu_0 H_l r^2 \pi \cdot 4{,}6.$$

Andererseits ist

$$H_e \cdot 2 s_2 = -H_l d.$$

Aus beiden Gleichungen folgt mit einiger Annäherung, da sich wegen der großen Streuung H_e längs des Magnetstahles stark ändert,

$$\frac{B}{H_e} = -\frac{\mu_0 H_l \cdot 4{,}6 \cdot 2 s_2}{H_l d} = -\frac{1 \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{Oe}} \cdot 4{,}6 \cdot 2 \cdot 5{,}6\ \mathrm{cm}}{2{,}05\ \mathrm{cm}} = -25{,}1 \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{Oe}}.$$

Die Gerade $B/H_e = 25{,}1$ G/Oe schneidet die Magnetisierungskurve im Punkt A mit den Koordinaten

$$B = 4950\ \text{G}, \quad H_e = -205\ \text{Oe}.^{1)}$$

Setzt man diesen Wert von H_e in die Feldstärkegleichung für Luft ein, so gilt

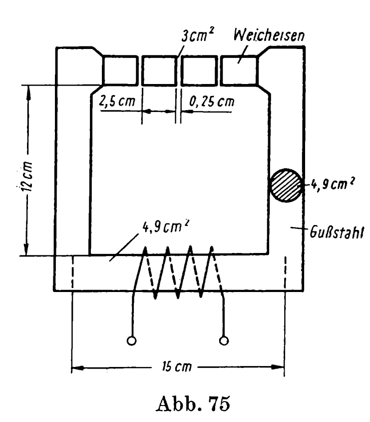


Abb. 75

$$H_l = -\frac{H_e \cdot 2 s_2}{d}$$

$$= -\frac{-205\ \text{Oe} \cdot 11{,}2\ \text{cm}}{2{,}05\ \text{cm}} = 1120\ \text{Oe}.$$

Da die Feldstärke aus der Kurve in Oerstedt erhalten wird, ist $\mu_0 = 1$ einzusetzen. Die Induktion des Luftspaltes ist somit

$$B_l = \mu_0 H_l = 1\ \frac{\text{G}}{\text{Oe}} \cdot 1120\ \text{Oe} = 1120\ \text{G}.$$

Beispiel 21

Dieses Beispiel soll die Wirkung der Streuung veranschaulichen. In Abb. 75 ist der Eisenkern eines Dreischleifenoszillographen skizziert. Im Luftspalt ist eine Induktion $B_\delta = 6000$ G erforderlich. Es soll die notwendige Durchflutung zuerst bei Vernachlässigung der Streuung, dann bei Berücksichtigung der Streuung der senkrechten, zylindrischen Schenkel berechnet werden.

a) Lösung bei Vernachlässigung der Streuung.
Bedeutet F_δ den Querschnitt des Luftspaltes, so ist der konstante Fluß des Kreises

$$\Phi = B_\delta \cdot F_\delta = 6000\ \text{G} \cdot 3\ \text{cm}^2 = 18000\ \text{M}.$$

---

[1]) Bei allen Beispielen wird für permanente Magnete angenommen, daß der Magnet in seiner zusammengebauten Form magnetisiert wurde. Dann bewegt man sich nach Beendigung der Magnetisierung auf einer solchen Hysteresisschleife abwärts, die eine der Aufmagnetisierung entsprechende Spitze hat. Dabei erreicht man den Remanenzpunkt B_r (Abb.74). Die Induktion nimmt so lange weiter ab, bis die magnetische Spannung des Magnetstahles den Spannungsbedarf des Luftspaltes gerade deckt (Punkt A). Wenn man dagegen die Weicheisenpolschuhe abnimmt, tritt nach der Magnetisierung eine größere Entmagnetisierungswirkung auf, die Induktion fällt weiter bis zum Schnittpunkt B der Hysteresisschleife mit der Luftspaltgeraden für den größeren Luftspalt. Werden die Pole dann wieder angebracht, wird mit wachsendem H nicht mehr die Originalkurve, sondern eine darunterliegende Hysteresisschleife bis zum Schnittpunkt C mit der vorherigen Luftspaltgeraden verfolgt. Dieser Vorgang wiederholt sich z.B. fortwährend beim Betrieb eines Generators mit einem kleinen T-förmigen Rotor mit permanenten Magneten. Ein ausgezeichneter Versuch zur Lösung ähnlicher, größtenteils noch ungeklärter Probleme ist die Arbeit von J. Desmond: The Economic Utilization of Permanent Magnets, Proc. I.E.E. 1945 II, S. 229.

Ist F_e der Querschnitt des Eisenkernes, dann beträgt die Induktion im Eisen

$$B_e = \frac{\Phi}{F_e} = \frac{18000 \text{ M}}{4{,}9 \text{ cm}^2} = 3670 \text{ G}.$$

Zur Aufrechterhaltung dieser Induktion wird nach der Magnetisierungskurve des Gußeisens eine Feldstärke $H_e = 4{,}3 \text{ A/cm}$ benötigt. Die auf die mit Weicheisen ausgeführten Abschnitte entfallende magnetische Spannung kann vernachlässigt werden. Entlang des geschlossenen Kreises des Eisenkernes ergibt sich für den magnetischen Spannungsabfall

$$U_{m0} = \frac{B_\delta}{\mu_0} \cdot 3\delta + H_e s_e = \frac{6000 \text{ G}}{1{,}256 \dfrac{\text{G cm}}{\text{A}}} 3 \cdot 0{,}25 \text{ cm} +$$

$$+ 4{,}3 \frac{\text{A}}{\text{cm}} \cdot (2 \cdot 12 + 15) \text{ cm} = 3748 \text{ A}.$$

Das ist die zur Aufrechterhaltung der gewünschten Luftspaltinduktion notwendige Durchflutung.

b) Jetzt soll untersucht werden, wie das unter a) erhaltene Ergebnis durch die Streuung der Anordnung beeinflußt wird. Dabei wird nur der zwischen den vertikalen zylindrischen Abschnitten verlaufende Streufluß betrachtet. Es wird angenommen, daß die Kraftlinien auf Ebenen senkrecht zu den Mittellinien der Säulen verlaufen. Die magnetische Leitfähigkeit der Streuwege zwischen 1 cm langen Abschnitten der beiden Zylinder (Beispiel 16) ist

$$\frac{\Lambda}{\text{cm}} = \frac{2\mu_0 \pi}{\ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)}.$$

Darin ist

$$u = \frac{d^2 - 2r^2}{2r^2} = \frac{(15^2 - 2 \cdot 1{,}25^2) \text{ cm}^2}{2 \cdot 1{,}25^2 \text{ cm}^2} = 70{,}5.$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, wird

$$\frac{\Lambda}{\text{cm}} = \frac{2 \cdot 1{,}256 \dfrac{\text{G} \cdot \text{cm}}{\text{A}} \cdot 3{,}14}{\ln\left(70{,}5 + \sqrt{70{,}5^2 - 1}\right)} = 1{,}6 \frac{\text{M}}{\text{A}} \cdot \frac{1}{\text{cm}}.$$

Die Leitfähigkeit der Streuwege in der Luft muß mit der magnetischen Spannung zwischen den Schenkeln multipliziert werden, um den Streufluß zu erhalten. Wegen des magnetischen Spannungsabfalles wird jedoch die Spannungsdifferenz von den Luftspalten nach der Erregerspule hin ständig größer. Die Berechnung kann näherungsweise so durchgeführt werden, daß man die Schenkel in kurze Abschnitte unterteilt und annimmt, daß der Fluß in diesen Abschnitten konstant ist. Die Kraftlinien würden dann nur an den Enden der einzelnen Abschnitte austreten. Diese Berechnung ist in Tabelle 7 zusammengefaßt.

Tabelle 7

Abschnitt x	Streufluß des Abschnittes	Fluß am Anfang des Abschnittes	Fluß am Ende des Abschnittes	Induktion am Ende des Abschnittes	Feldstärke am Ende des Abschnittes	Magnetische Weglänge des Abschnittes	Magnetische Spannung des Abschnittes	Magnetische Gesamtspannung bis zum Ende des Abschnittes
cm	$\Phi_x = 2\,\mathrm{cm} \cdot \frac{\Lambda}{\mathrm{cm}} \cdot U_{m(x-1)}$	Φ_a	$\Phi_e = \Phi_a + \Phi_x$	$B = \frac{\Phi_e}{4{,}9\,\mathrm{cm}^2}$	H_e	s	$U_{mx} = H_e \cdot s$	$U_m = U_{m\delta} + \Sigma U_{mx}$
		M	M	G	A/cm	cm	A	A
0–2	$3600 \cdot 1{,}6 \cdot 2 = 11500$	18000	29500	6020	5,9	$2 \times 2 = 4$	23,6	3623,6
2–4	$3623 \cdot 1{,}6 \cdot 2 = 11590$	29500	41090	8380	7,5	$2 \times 2 = 4$	30	3653,6
4–6	$3653 \cdot 1{,}6 \cdot 2 = 11690$	41090	52780	10760	9,8	$2 \times 2 = 4$	39,2	3692,8
6–8	$3693 \cdot 1{,}6 \cdot 2 = 11810$	52780	64590	13170	16,5	$2 \times 2 = 4$	66	3758,8
8–10	$3758{,}8 \cdot 1{,}6 \cdot 2 = 12030$	64590	76620	15640	39,0	$2 \times 2 = 4$	156	3914,8
10–12 + Joch	$3919{,}8 \cdot 1{,}6 \cdot 2 = 12520$	76620	89140	18200	130,0	$4 + 15$	2470	6385

Am Anfang des ersten, 2 cm langen Abschnittes ist die magnetische Spannungsdifferenz gleich der erforderlichen magnetischen Spannung für die Luftspalte. Diese Annahme kann gemacht werden, da der Spannungsbedarf des Weicheisens im Vergleich zu dem der Luftspalte vernachlässigt werden kann. Multipliziert man diese magnetische Spannung $U_m = 3600\,\text{A}$ mit der Leitfähigkeit des 2 cm langen Feldabschnittes

$$2\,\frac{\Lambda}{\text{cm}} = 2 \cdot 1{,}6\,\frac{\text{M}}{\text{A}} \cdot \text{cm}^{-1},$$

so erhält man den Streufluß dieses Abschnittes. Die auf diese Strecke entfallende magnetische Spannung wird für die gesamte Länge des Abschnitts bestimmt, und zwar entsprechend der Induktion, die zu dem am Ende des Abschnittes austretenden Fluß gehört. Damit wird teilweise der Fehler ausgeglichen, der dadurch entsteht, daß der Streufluß aus der magnetischen Spannung des Streckenanfangs berechnet wird. Die Berechnung wird für die folgenden Abschnitte analog weitergeführt und ist an Hand der Tabelle leicht zu verfolgen. Das Endergebnis zeigt, daß die Durchflutung gegenüber 3748 A bei der Berechnung unter a) infolge der Streuung der senkrechten Schenkel 6385 A beträgt. Das ist eine Steigerung um etwa 70%. Da das wirkliche Streulinienbild vereinfacht wurde, erhält man nur ein angenähertes Ergebnis. Das Beispiel zeigt jedoch, wie groß der Fehler bei Vernachlässigung der Streuung bereits bei nicht allzu großen Luftspalten werden kann.

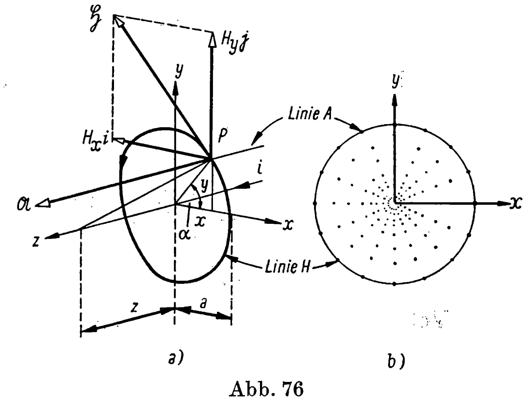


Abb. 76

Beispiel 22

Es soll das Magnetfeld eines unendlich langen geraden Leiters mit kleinem Querschnitt berechnet werden. An Hand dieser einfachen Anordnung sollen die verschiedenen Berechnungsmethoden miteinander verglichen werden.

a) Mit Vektorpotential (15.)[1])

Die z-Achse wird so gewählt, daß sie mit der Richtung des Leiters zusammenfällt (Abb. 76). Das Vektorpotential ist dann überall ein zur z-Achse paralleler Vektor, und die Feldstärkelinien liegen in der xy-Ebene. Der

[1]) Die in Klammern gesetzten Zahlen verweisen auf die in gleicher Weise numerierten Abschnitte in 2.2 „Übersicht über die Berechnungsmethoden".

Abstand eines beliebigen Punktes P dieser Ebene von z sei a. Das Vektorpotential in diesem Punkte ist dann, da $ds = \mathfrak{k} \cdot dz$ ($\mathfrak{k}$ ist der Einheitsvektor in z-Richtung) und $r^2 = z^2 + a^2$ ist,

$$\mathfrak{A}' = \frac{i\mathfrak{k}}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{i\mathfrak{k}}{4\pi}\left[\operatorname{arsinh}\frac{z}{a}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2i\mathfrak{k}}{4\pi}\left[\operatorname{arsinh}\frac{z}{a}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{2i\mathfrak{k}}{4\pi}\left[\ln\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right)\right]_0^{\infty} = \left(C_\infty - \frac{2i}{4\pi}\ln a\right)\mathfrak{k}.$$

Wichtig ist nur die Ableitung von $\mathfrak{A}'$, die Konstante C_∞ kann unbeachtet bleiben. Es ist

$$\mathfrak{A}' = A_z' \cdot \mathfrak{k} = -\frac{2i\mathfrak{k}}{4\pi}\ln a.$$

Berücksichtigt man $a = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}'$, dann wird

$$H_x = \frac{\partial A_z'}{\partial y} = -\frac{2i}{4\pi a^2}\,y = -\frac{2i}{4\pi a}\sin a,$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z'}{\partial x} = \frac{2i}{4\pi a^2}\,z = \frac{2i}{4\pi a}\cos a,$$

$$H_z = 0.$$

Der Vektor der Feldstärke in P fällt also mit den Tangenten des Kreises mit dem Radius a zusammen. Seine Größe ist

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \frac{i}{2\pi a}.$$

Die Feldstärkelinien sind also konzentrische Kreise. Die den konstanten Werten der Vektorpotentiale entsprechenden Flächen sind durch diese Kreise tretende Zylinderflächen, deren Halbmesser bei gleichen Potentialsprüngen eine geometrische Reihe bilden. Die Äquipotentiallinien sind radialgerichtete Strahlen mit dem Leiter als Kern.

b) Mit Hilfe des BIOT-SAVARTschen Gesetzes (16.)

Der Beitrag zur Feldstärke im Punkt P (Abb. 77) des zwischen den Radien r_1 und r_2 liegenden Leiterstücks mit dem Strom i ist

$$H_{P(\alpha_1-\alpha_2)} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{i r\,d\alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{i r\,d\alpha}{r\,\dfrac{a}{\cos\alpha}}$$

$$= \frac{i}{4\pi a}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{i}{4\pi a}\left[\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right].$$

Ist $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$, dann ist

$$H_P = \frac{i}{4\pi a}[1 - (-1)] = \frac{i}{2\pi a}.$$

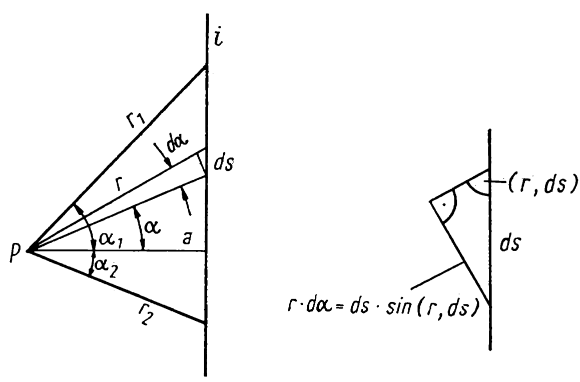


Abb. 77

Der Feldstärkevektor hat die gleiche Richtung wie vorhin, da im Sinne des Biot-Savartschen Gesetzes $d\mathfrak{H}$ senkrecht zu $\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{s}$ steht. Das trifft in diesem Fall auf jedes Element zu.

c) Nach dem modifizierten Biot-Savartschen Gesetz (17.)
Entsprechend Abb. 78 ist

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{\sin\vartheta}{a}}.$$

Dann wird

$$F_{xz} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\varrho^2 \, d\vartheta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,\frac{\sin\vartheta}{a}\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{a}\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{a}.$$

Die Feldstärke hat also den Wert

$$\mathfrak{H} = \frac{2i}{4\pi}\,\mathfrak{j}\cdot F_{xy} = \frac{i}{2\pi a}\,\mathfrak{j}.$$

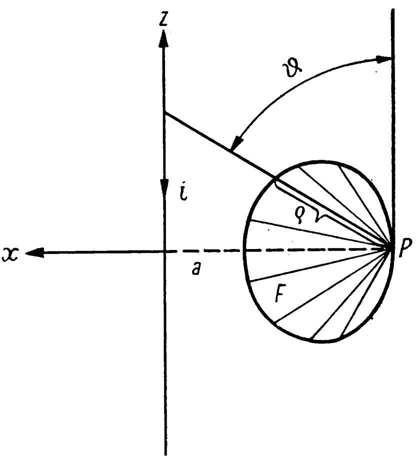


Abb. 78

$\mathfrak{j}$ ist ein auf der Zeichnungsebene senkrechter Einheitsvektor in y-Richtung. Ein besonderer Vorteil dieser Methode ist, daß jedes Segment der mit den Strahlen ϱ beschriebenen Fläche kennzeichnend ist für das Maß des Beitrages der entsprechenden Leiterlänge zur Feldstärke des Punktes P.

d) Mit magnetischer Doppelschicht (18.)

Die gleichwertige magnetische Doppelschicht dehnt sich von der z-Achse, die mit dem Leiter zusammenfallen soll, in der zx-Ebene ins Unendliche aus (Abb. 79). Man zeichne eine Einheitskugel um den betrachteten Punkt P. Der Schnitt der Ebene yx mit der Kugel steht statt unter dem maximalen Winkel 2π unter dem Winkel $\pi - \vartheta$ zu der Doppelschicht. Da der gesamte Raumwinkel 4π beträgt, wird hier der der Doppelschicht entsprechende Raumwinkel

$$\omega = 4\pi \frac{\pi - \vartheta}{2\pi} = 2(\pi - \vartheta).$$

Die Feldstärke beträgt dann

$$\mathfrak{H} = -\frac{i}{4\pi} \operatorname{grad} 2(\pi - \vartheta).$$

Unter Berücksichtigung von $\vartheta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$ wird

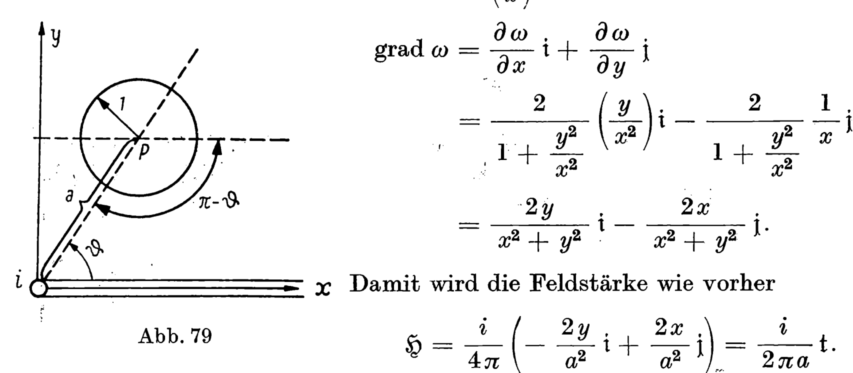


Abb. 79

$$\operatorname{grad} \omega = \frac{\partial \omega}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\mathfrak{j}$$

$$= \frac{2}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{y}{x^2}\right)\mathfrak{i} - \frac{2}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x}\mathfrak{j}$$

$$= \frac{2y}{x^2 + y^2}\mathfrak{i} - \frac{2x}{x^2 + y^2}\mathfrak{j}.$$

Damit wird die Feldstärke wie vorher

$$\mathfrak{H} = \frac{i}{4\pi}\left(-\frac{2y}{a^2}\mathfrak{i} + \frac{2x}{a^2}\mathfrak{j}\right) = \frac{i}{2\pi a}\mathfrak{t}.$$

$\mathfrak{t}$ ist der tangentiale Einheitsvektor des um i durch P gezogenen Kreises in P.

e) Aus dem Durchflutungsgesetz (19.)

Wegen der vollständigen Symmetrie sind die Feldstärkelinien Kreise. H kann daher unmittelbar aus dem Durchflutungsgesetz berechnet werden:

$$\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = H \cdot 2\pi a \cdot i.$$

Hieraus folgt

$$H = \frac{i}{2\pi a}.$$

f) Nach der Methode der „krummlinigen Quadrate“ (27.)

Das Bild des Magnetfeldes wird nach folgenden Erwägungen ermittelt. Der magnetische Leitwert des dr breiten Feldabschnittes der Einheitstiefe mit dem Bogen α ist

$$d\Lambda = \frac{\mu_0\, dr \cdot 1}{r\alpha}.$$

Der magnetische Leitwert des gesamten Feldabschnittes von Einheitstiefe mit dem „Quadrat“-Schnitt a–b–c–d ist

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{\alpha} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{\alpha} \ln \frac{b}{a}.$$

Der magnetische Leitwert eines Würfels mit der Einheitskante ist μ_0. Soll also erreicht werden, daß a–b–c–d ein „krummliniges Quadrat“ ist, dann muß man es so zeichnen, daß

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{\alpha} \ln \frac{b}{a} = \mu_0$$

wird. Es muß also sein:

$$\frac{b}{a} = e^{\alpha}.$$

Wenn z. B. $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ist, dann muß man die Kreise unter Einhaltung des Radienverhältnisses

$$\frac{b}{a} = e^{\frac{\pi}{6}} = 1{,}69$$

zeichnen. Abb. 80 ist so konstruiert.

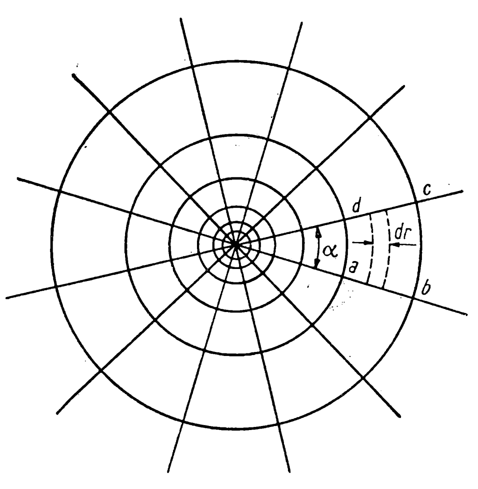


Abb. 80

Beispiel 23

Abb. 81 zeigt schematisch den auf die Nutenteilung entfallenden Abschnitt der offenen Läufernut einer elektrischen Maschine, von Zahnmitte bis Zahnmitte, und die Grenzlinie des gegenüberliegenden Statorpols. Die kreisförmigen Grenzlinien des Ankers und des Stators können durch Geraden gut angenähert werden. Durch den Einfluß der Nut wird der magnetische Widerstand des Luftspaltes größer. Der hindurchtretende Fluß, der von einer bestimmten magnetischen Spannung erzeugt wird, ist kleiner, als wäre die Grenzlinie der beiden gegenüberliegenden Eisenflächen gerade. Ähnlich wirken die Kühlschlitze, die den Eisenkörper der elektrischen Maschinen unterbrechen. In der Skizze ist außerdem die ungefähre Verteilung der Induktion längs der Polfläche eingezeichnet. Durch den Einfluß der Nut geht der mit der gestrichelten Fläche gekennzeichnete Fluß verloren. Ein Maß für diesen Verlust ist der Quotient des tatsächlichen Flusses Φ_w und des ohne Nut vorhandenen Flusses Φ, also der Quotient der Flächen $F_t - F$ und F_t. Ersetzt man die Fläche des Flusses $F_t - F$ durch eine Fläche mit der gleichmäßigen

Höhe $\overline{B}$, dann ist

$$\frac{\Phi_w}{\Phi} = \frac{(a+b)\overline{B}}{(a+b)B_{\max}} = \frac{\overline{B}}{B_{\max}}.$$

Der reziproke Wert ist der Faktor k, mit dem man die Luftspaltbreite δ multiplizieren muß, um den infolge des Nuteneffektes wirksamen Luftspalt zu erhalten:

$$\delta' = k\delta.$$

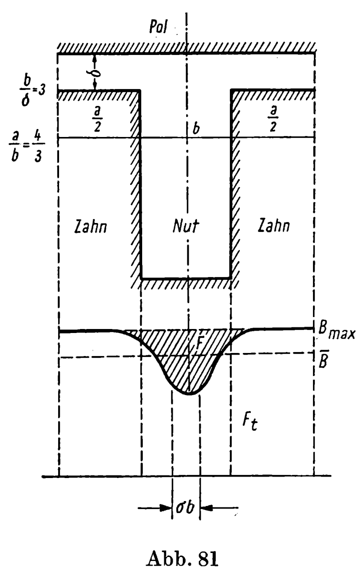


Abb. 81

Man kann auch die Fläche F zu einem gleichmäßigen Streifen mit der Höhe $B_{\max}$ umgestalten. Die Breite dieses Streifens sei σb, wobei b die Nutenbreite ist. Dann ist

$$\Phi_w = (a+b)B_{\max} - \sigma \cdot b \cdot B_{\max},$$

$$\frac{\Phi_w}{\Phi} = 1 - \frac{\sigma b}{a+b}.$$

Der Faktor k ist

$$k = \frac{1}{1 - \frac{\sigma b}{a+b}}.$$

Nachfolgend wird der Faktor k für die Anordnung in Abb. 81 nach verschiedenen Methoden bestimmt.

a) durch konforme Abbildung* (21.)

Folgende Annahmen werden getroffen:

1. Die Permeabilität des Eisens ist unendlich. Aus diesem Grunde sind sowohl die Nutenwände als auch die gegenüberliegende Polfläche Niveaulinien ($V = V_0$ und $V = V_m$).
2. Die Nut sei unendlich tief.
3. Die Wirkung der benachbarten Nut kann vernachlässigt werden. Die Polfläche und die ihr gegenüberliegenden Zahnköpfe dehnen sich bis ins Unendliche aus.
4. Der Leiter liegt so tief in der Nut, daß er die Verteilung der Induktion in der Nähe der Nutenöffnung nicht mehr beeinflußt. Das Flußbild ist zur Mittellinie der Nut symmetrisch. Es genügt also, eine Hälfte zu untersuchen (Abb. 82a).

Die Aufgabe besteht jetzt darin, eine Abbildung zu finden, die den Feldabschnitt der $z = x + \mathrm{j}y$-Ebene, der zwischen der Polfläche und der Mittellinie sowie der Nutenwand und dem Zahnkopf liegt, in den Parallelstreifen einer anderen komplexen Ebene $w = V + \mathrm{j}\Phi$ überführt. Die Grenzlinien

des Parallelstreifens entsprechen den Grenzlinien mit dem Potential V_0 und V_m des Feldabschnittes der Nut. Die dazwischenliegenden parallelen Geraden entsprechen den Äquipotentiallinien und die zu diesen senkrechten Geraden den Linien konstanten Flusses, d.h. den Kraftlinien (Abb. 82c). Sucht man auf der z-Ebene die entsprechenden Punkte einiger solcher Punkte der w-Ebene aus, die auf den Geraden $\Phi = \text{const}$ und $V = \text{const}$ liegen, und verbindet diese, so erhält man das gesuchte Flußbild der Nut. Die Abbildung kann mit Hilfe der SCHWARZschen Transformation in zwei Schritten durch Einführung einer Hilfsebene (Abb. 82b) durchgeführt werden. Zunächst wird die z-Ebene auf der Hilfsebene t abgebildet. Dem Vieleck der z-Ebene entspricht die reelle Achse der t-Ebene. Das Polygon des Beispiels hat vier Eckpunkte. A und C sind endliche Punkte, B und D liegen im Unendlichen. Von den Punkten auf der reellen Achse der t-Ebene, die den Eckpunkten entsprechen, sind drei frei wählbar. Es wird angenommen, daß D im Unendlichen und B im Ursprung liegen. Als letzter frei wählbarer Punkt wird C angenommen, der sich irgendwo zwischen B und D befinden muß. Er wird in die Entfernung $+ 1$ vom Ursprung gelegt. Der vierte Punkt A befindet sich zwischen B und D. Seine Entfernung, mit α bezeichnet, ist noch unbestimmt. Die einander entsprechenden Werte sind in der folgenden Tabelle angegeben.

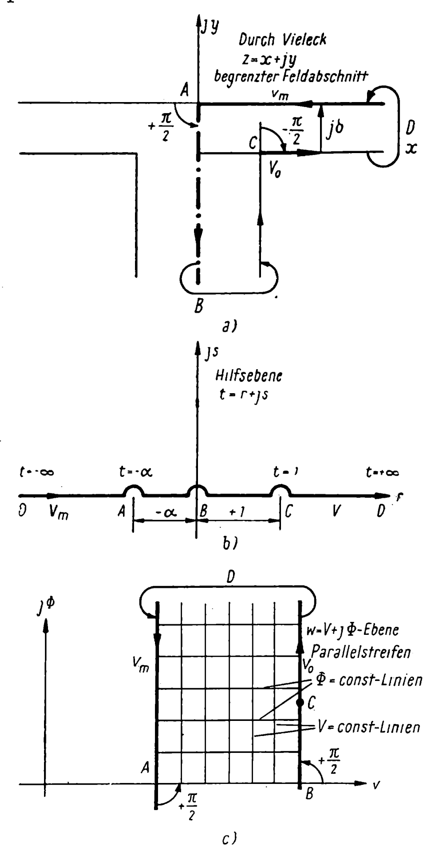


Abb. 82

Punkte	A	B	C	D
z	$j\delta$	$-j\infty$	$+b$	$+\infty$
t	$-\alpha$	0	$+1$	$+\infty$
Außenwinkel des Vielecks in der z-Ebene	$+\frac{\pi}{2}$	$+\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$+\pi$
Potenz	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$-\frac{1}{2}$	$+1$

Der Differentialquotient der Abbildungsfunktion lautet nach dem SCHWARZschen Satz

$$\frac{dz}{dt} = \frac{C}{[t-(-\alpha)]^{\frac{1}{2}}(t-0)^1(t-1)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{C}{t}\sqrt{\frac{t-1}{t+\alpha}}.$$

Nach der Einführung der neuen Veränderlichen

$$p = \sqrt{\frac{t-1}{t+\alpha}}$$

und Integration lautet das Ergebnis

$$z = C\left[\ln\frac{\sqrt{t+\alpha}+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+\alpha}-\sqrt{t-1}} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\alpha(t-1)}{t+\alpha}}\right] + C_1.$$

Die Bestimmung der Konstanten erfolgt auf folgende Weise:

1. $z = b/2$ und $t = 1$ eingesetzt, ergibt: $C_1 = b/2$
2. Ist $t = +\infty$, dann wird

$$\sqrt{\frac{t-1}{t+\alpha}} = 1.$$

Aus der Differentialgleichung ergibt sich

$$z = C\int\frac{dt}{t} + C_1 = C\ln t + \frac{b}{2}.$$

Geht man vom Punkt t_1, der auf der $+r$-Achse sehr weit entfernt liegt und dem der Punkt $z_1 = x_1 = C\cdot\ln t + \frac{b}{2}$ entspricht, mit einem Kreis vom Radius t in den auf der $-x$-Achse sehr weit entfernt liegenden Punkt über, so wächst der Wert von z mit $\mathrm{j}\delta$. Es ist also

$$z_2 = x_1 + \mathrm{j}\delta = C(\ln t_1 + \mathrm{j}\pi) + \frac{b}{2},$$

da $\ln t = \ln|t| + \mathrm{j}\operatorname{arc} t$ ist. Man erhält also

$$C = \frac{\delta}{\pi}.$$

3. Werden die zusammengehörenden Werte $z = \mathrm{j}\delta$ und $t = -\alpha$ eingesetzt, so ergibt sich

$$\alpha = \frac{4\delta^2}{b^2}.$$

Nach Bestimmung der Konstanten ist also gefunden:

$$z = \frac{b}{2} + \frac{\delta}{\pi}\left[\ln\frac{\sqrt{t+\frac{4\delta^2}{b^2}}+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+\frac{4\delta^2}{b^2}}-\sqrt{t-1}} - \frac{b}{\delta}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\delta}{b}\sqrt{\frac{t-1}{t+\frac{4\delta^2}{b^2}}}\right)\right].$$

Die konforme Abbildung der Parallelstreifen der $w = V + \mathrm{j}\Phi$-Ebene erfolgt in die obere Raumhälfte der Hilfsebene t mit den Bezeichnungen der Abbildung durch das Integral der zur früheren analog gebildeten Formel

$$\frac{dw}{dt} = \frac{C_2}{(t+\alpha)^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}} = \frac{C_2}{\sqrt{t(t+\alpha)}}.$$

Wird nach der Integration der daraus gewonnene Ausdruck für t in die vorgenannte Formel für z eingesetzt, erhält man den gewünschten Zusammenhang zwischen den Punkten der Ebenen z und w. Setzt man hier verschiedene gewählte Werte V und Φ ein, erhält man auf der z-Ebene die xy-Koordinaten der Schnittpunkte von den mit den beiden Werten charakterisierten Niveau- und Induktionslinien. Nach Berechnung und Zeichnung einer entsprechenden Anzahl von Punkten bilden diese Linien, die die durch die Werte V = const und Φ = const gekennzeichneten Punkte verbinden, die gesuchten Niveau- und Induktionslinien. Dieses Verfahren ist allerdings recht umständlich. In der Praxis ist es daher üblich, die Faktoren der Luftspalte für die üblichen Abmessungen von Nuten aus einem berechneten Diagramm zu entnehmen oder mit Näherungsformeln zu berechnen. Das Flußbild in Abb. 83 ist nach F. W. CARTER gezeichnet. Daraus ist dann graphisch die Induktionsverteilung längs der Polfläche konstruiert worden. CARTER benutzt nicht die w-Ebene, sondern wählt die auf gleichen Winkeln liegenden Halbmesser und konzentrischen Kreisbögen der t-Ebene unmittelbar als V = const- und Φ = const-Linien (F. W. CARTER: El. World 1901, S. 887, und J. KUCERA, E u. M 1940, S. 332).

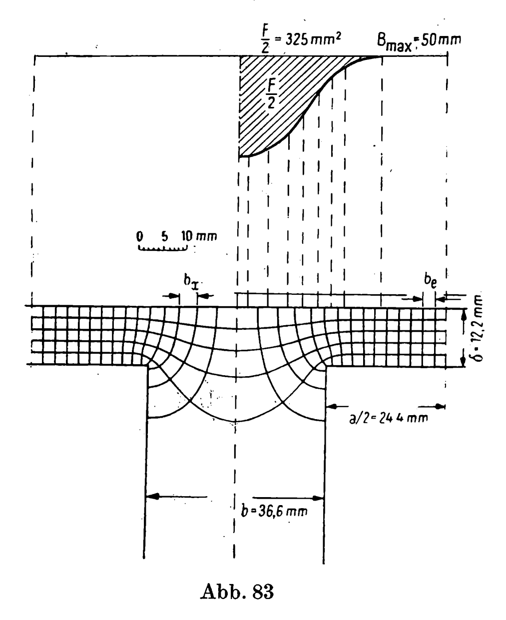


Abb. 83

Aus der Zeichnung ergibt sich

$$\sigma = \frac{F}{B_{\max}\cdot b} = \frac{2\cdot 325\ \mathrm{mm}^2}{50\ \mathrm{mm}\cdot 36{,}6\ \mathrm{mm}} = 0{,}36.$$

Der Luftspaltfaktor ist

$$k = \frac{1}{1 - \dfrac{\sigma b}{a + b}} = \frac{1}{1 - \dfrac{0{,}36 \cdot 36{,}6}{48{,}8 + 36{,}6}} = 1{,}185 .$$

Die relative Größe der Induktion in den einzelnen Punkten an der Polfläche wird aus dem Verhältnis berechnet, das die Breite der ausgewählten Flußkanäle b_x zur Breite der Flußkanäle im Feldabschnitt von bereits gleichförmiger Liniendichte b_g bilden:

$$\frac{B_x}{B_{\max}} = \frac{b_g}{b_x} .$$

Der effektive Luftspalt, der bei der Berechnung der magnetischen Spannung des Luftspaltes berücksichtigt werden muß, ist

$$\delta' = k\delta = 1{,}185\,\delta .$$

Aus den Kurven von CARTER ergeben sich folgende Werte:

$$\sigma = 0{,}37 ,$$

$$k = 1{,}19 .$$

Soll nur die Verteilung der Induktion längs des Poles ermittelt werden und nicht das Flußbild selbst, so kommt man ausschließlich durch Berechnung, ohne eine Zeichnung des Flußbildes, rasch zum Ziel: Nach Gleichung (2.17) ist

$$B = -\mu_0 \left[\frac{dw}{dz}\right]^* = -\mu_0 \left[\frac{\dfrac{dw}{dt}}{\dfrac{dz}{dt}}\right]^* = -\left[\frac{C_2 \mu_0 \dfrac{1}{\sqrt{t(t+\alpha)}}}{\dfrac{\delta}{\pi} \cdot \dfrac{1}{t} \sqrt{\dfrac{t-1}{t+\alpha}}}\right]$$

$$= -\frac{C_2 \mu_0}{\delta} \left[\sqrt{\frac{t}{t-1}}\right]^* .$$

Gesucht ist nur die relative Verteilung der Induktion. Es ist daher, wenn der Maximalwert von 100%, entsprechend der Zeichnung zu 50 mm, angenommen wird,

$$B_x = 50\,\text{mm} \sqrt{\frac{t}{t-1}} .$$

Gesucht ist die Verteilung der Induktion auf der Polfläche, also auf dem Abschnitt A–D von Abb. 82a. Diesem entspricht Abschnitt A–D in Abb. 82b, also die Strecke der horizontalen Achse, die zwischen $t = -\alpha$ und $t = -\infty$ liegt. Von $t = -\infty$ angefangen, werden verschiedene reelle Werte aufgenommen, und zu diesen t werden die entsprechenden z und B_x berechnet. In der Tabelle 8 ist der Verlauf der Berechnung zusammengefaßt.

Die Werte von B_x und z ergeben sich in Millimeter. Die Ergebnisse stimmen durchaus zufriedenstellend mit den Punkten der aus dem Flußbild in Abb. 83 konstruierten Kurve B_x überein.

Tabelle 8

t	$-a = 0{,}445$	$-0{,}645$	-1	-2
$B_\varkappa = 50\sqrt{\frac{t}{t-1}}$	55,5	62,5	70,7	81,8
$w_1 = \frac{\sqrt{t + \frac{4\delta^2}{b}} + \sqrt{t-1}}{\sqrt{t + \frac{4\delta^2}{b^2}} - \sqrt{t-1}}$		$-2{,}37$	$-3{,}22$	$-6{,}2$
$\ln w_1 = \ln \lvert w_1 \rvert + \mathrm{j} \operatorname{arc} w_1$		$0{,}865 + \mathrm{j}\pi$	$1{,}17 + \mathrm{j}\pi$	$1{,}83 + \mathrm{j}\pi$
$w_2 = \frac{2}{\delta}\sqrt{\frac{t-1}{t + \frac{4\delta_2}{b}}}$		1,91	1,26	0,925
$\operatorname{arctg} w_2 = \frac{1}{\mathrm{j}} \ln \sqrt{\frac{1 + \mathrm{j} w_2}{1 - \mathrm{j} w_2}}$		1,09	0,91	0,825
$z = \frac{b}{2} + \frac{\delta}{\pi}\left[\ln w_1 - \frac{b}{\delta} \operatorname{arctg} w_2\right]$	$\mathrm{j}\delta$	$9 + \mathrm{j}\delta$	$12{,}24 + \mathrm{j}\delta$	$15{,}8 + \mathrm{j}\delta$

b) durch Berechnung aus dem vereinfachten Flußbild nach E. ARNOLD (22)

Die Flußröhren zwischen dem Pol und den Nutenwänden werden durch Röhren mit gleichmäßigem Querschnitt ersetzt, die in der Ebene durch gerade und kreisförmige Linien begrenzt werden (Abb. 84). Die magnetische Leitfähigkeit des Nutenraumes, die mit Hilfe dieses Flußbildes berechnet wird, ist kleiner als die wahre Leitfähigkeit, da sich die wahren Flußröhren zur Nutenwand hin verdicken. Die Differenz wird durch einen Korrekturfaktor berücksichtigt. Sein Wert ist aus vielen graphischen Flußbildern für die jeweiligen Verhältnisse von Luftspalt-Nutenbreite-Nutenteilung so gewählt, daß die Zeichnung, die die größte Leitfähigkeit ergibt, als richtig angesehen wird. Die Leitfähigkeit einer Flußröhre mit der Breite β_x, der Einheitstiefe mit der mittleren Länge δ_x (Abb. 84) beträgt

$$\frac{\mu_0 \beta_x}{\delta_x}.$$

Die Leitfähigkeit des ganzen Abschnittes der Nutteilung wird bei Anwendung des vereinfachten Flußbildes

$$2\sum\frac{\beta_x}{0{,}8\,\delta_x} = 2\,\frac{\frac{a}{2}}{0{,}8\cdot\delta} + 2\int\limits_{\frac{a}{2}}^{\frac{a+b}{2}}\frac{dx}{0{,}8\left[\delta+\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]}.$$

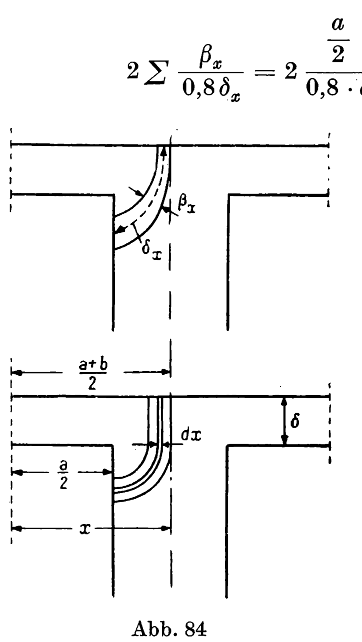


Abb. 84

Setzt man

$$\delta+\frac{\pi}{2}\,x-\frac{\pi}{4}\,a=y,\quad dy=\frac{\pi}{2}\,dx,$$

dann wird der zweite Summand der rechten Seite der Gleichung

$$\frac{4}{0{,}8\pi}\int\frac{dy}{y}=\frac{4}{0{,}8\pi}\ln y.$$

Dies eingesetzt und die Grenzen berücksichtigt, ergibt

$$2\Sigma\frac{\beta_x}{0{,}8\,\delta_x} = \frac{1}{0{,}8}\left[\frac{a}{\delta}+\frac{4}{\pi}\,2{,}3\log\left(1+\frac{\pi b}{4\,\delta}\right)\right].$$

Den Korrekturfaktor für die Erweiterung der Röhren gibt Arnold mit $\frac{cb}{0{,}8\delta}$ an. Die aus den Kraftlinienbildern graphisch ermittelte Konstante c ist dabei

$$c=\frac{0{,}125\,\frac{b}{\delta}}{1+0{,}4\left(\frac{b}{\delta}\right)^2}.$$

Die korrigierte Leitfähigkeit beträgt also

$$\frac{1}{0{,}8}\left[\frac{a}{\delta}+\frac{4}{\pi}\,2{,}3\log\left(1+\frac{\pi b}{4\delta}\right)+\frac{0{,}125\left(\frac{b}{\delta}\right)^2}{1+0{,}4\left(\frac{b}{\delta}\right)^2}\right]=\frac{1}{0{,}8}\left[\frac{a}{\delta}+X\right].$$

Ist keine Nut vorhanden und der Luftspalt gleichmäßig, dann beträgt die magnetische Leitfähigkeit des gleichen Abschnittes

$$\frac{a+b}{0{,}8\cdot\delta}.$$

Das Verhältnis beider Leitfähigkeiten ist dann

$$k = \frac{\dfrac{a+b}{0{,}8\,\delta}}{\dfrac{1}{0{,}8}\left[\dfrac{a}{\delta} + X\right]} = \frac{a+b}{a+X\delta}.$$

Bei einem Verhältnis $\frac{b}{\delta} = 3$ wird $X = 1{,}77$ und damit

$$k = \frac{85{,}3}{48{,}8 + 1{,}77 \cdot 12{,}2} = 1{,}21.$$

c) nach der „Methode der Reste" (23. bis 26.)

Im untersuchten Raum der Nuten und Luftspalte wird zunächst ein grobes Netz gezeichnet (Abb. 85). An den Schnittpunkten werden die ungefähren Potentialwerte auf Grund der gefühlsmäßig eingezeichneten Niveaulinien eingezeichnet (Abb. 86).

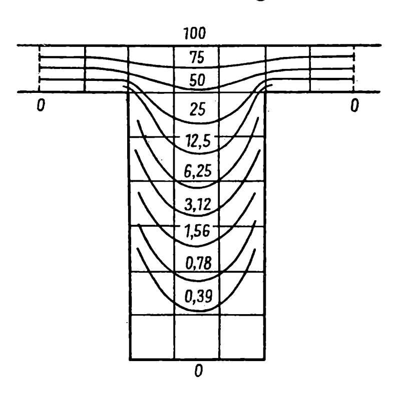


Abb. 85

Damit die Darstellung in der Abb. 86 nicht unübersichtlich wird, sind nur die ersten Schritte eingeschrieben, mit deren Hilfe der Rest zum Verschwinden gebracht wird. Wegen der Symmetrie können je zwei Knotenpunkte gemeinsam behandelt werden. An den Punkten a und b zieht man von den Restladungen die Werte -6 ab, so daß eine Restladung $+9$ entsteht. Gleichzeitig strömt aus a nach b und c und aus b nach a und d die Ladung -6. Dadurch vermindern sich die Ladungen von a und b auf $+3$. Die Ladungen von c und d wachsen von -8 auf -14 an. Zieht man jetzt von den Potentialen von c und d jeweils -5 ab, ändern sich die Restwerte auf $+1$. Inzwischen ändern sich die Reste von a und b auf -2 und von e und f auf $-3{,}6$. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis die Reste vernachlässigbar klein werden. In Abb. 87 sind die endgültigen Potentiale und die verbleibenden Reste angegeben. Man fertigt jetzt ein feineres Netz für den Abschnitt im Luftspalt an (Abb. 88). Wegen der Symmetrie wird nur eine Hälfte des Luftspaltes betrachtet. Die aufgerundeten Werte der Knotenpunkte a und b aus der Abb. 87 werden beibehalten. Die Potentialwerte der übrigen Punkte der Grenzlinie 0–a–b–0 werden abgeschätzt. Sie stellen die Grenzbedingungen an der Linie 0–a–b–0 dar. Man verfährt wie vorhin. Die endgültigen Potentialwerte der Eckpunkte und die Reste sind in Abb. 88 eingeschrieben. Mit Hilfe der Potentialwerte kann man die Induktionsverteilung längs der Polfläche zeichnen.

Von Interesse ist nur die relative Verteilung der Induktion. Nimmt man in der Zeichnung die maximale Induktion B_{max} wieder zu 50 mm $\triangleq$ 100% an

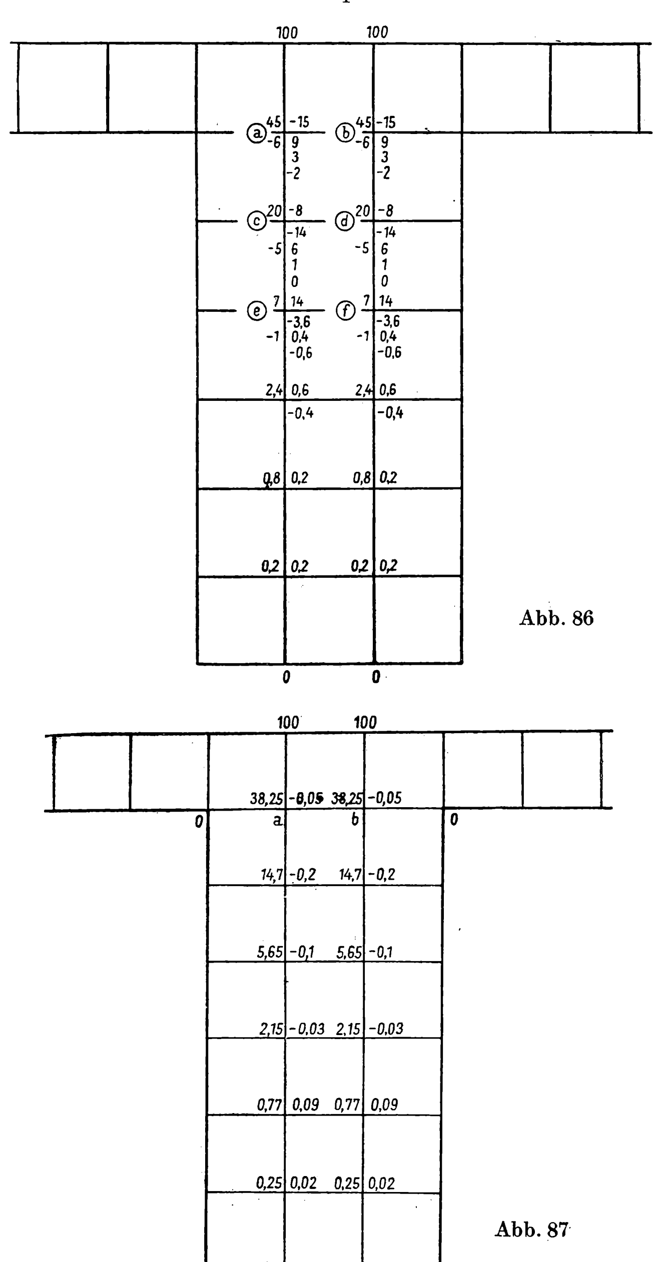

100 100
a 45 -6 -15 9 3 -2
b 45 -6 -15 9 3 -2
c 20 -5 -8 -14 6 1 0
d 20 -5 -8 -14 6 1 0
e 7 -1 14 -3,6 0,4 -0,6
f 7 -1 14 -3,6 0,4 -0,6
2,4 0,6 -0,4 2,4 0,6 -0,4
0,8 0,2 0,8 0,2
0,2 0,2 0,2 0,2
0 0

Abb. 86

100 100
38,25 -0,05 38,25 -0,05
0 a b 0
14,7 -0,2 14,7 -0,2
5,65 -0,1 5,65 -0,1
2,15 -0,03 2,15 -0,03
0,77 0,09 0,77 0,09
0,25 0,02 0,25 0,02

Abb. 87

und wählt die Seitenlänge des Quadrates zu $a = 1$, so ist in den Punkten entlang des Pols der Reihe nach:

$$B_a \approx \frac{\varphi_a - \varphi_{a'}}{a} = \frac{100 - 80{,}3}{1} = 19{,}7; \qquad \frac{19{,}7}{33{,}4}\,100\,\% = 59\,\% \mathrel{\hat{=}} 29{,}5\ \text{mm}$$

$$B_b \approx 21\ ; \qquad 31{,}4\ \text{mm}$$

$$B_c \approx 23{,}2; \qquad 34{,}7\ \text{mm}$$

$$B_d \approx 26{,}3; \qquad 39{,}4\ \text{mm}$$

$$B_e \approx 30\ ; \qquad 44{,}9\ \text{mm}$$

$$B_f \approx 32\ ; \qquad 47{,}9\ \text{mm}$$

$$B_g \approx 32{,}8; \qquad 49{,}1\ \text{mm}$$

$$B_h \approx 33{,}2; \qquad 49{,}7\ \text{mm}$$

$$B_i \approx 33{,}4; \qquad \frac{33{,}4}{33{,}4} \cdot 100 = 100\,\% \mathrel{\hat{=}} 50\ \ \text{mm}$$

100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	
80,3	0,1 80,3	0,1 79	0,1 76,8	0,1 73,7	0,4 70	0 68	0,2 67,2	0 66,8	0,1 66,6	0,2 66,6	0,1 66,6	
	a'	b'										
62	0,1 62	0,1 58,8	0,6 54,6	0,1 47,9	0 38,3	-0,4 35	0,3 34	-0,3 33,5	0,1 33,3	0,2 33,3	0,1 33,3	0
47	47	39	35	25	0	0	0	0	0	0	0	

Abb. 88

Die Verteilung der Induktion ist in Abb. 89 angegeben. Die verlorengegangene halbe Fläche des Flusses in mm² ergibt sich aus der Zeichnung zu $F/2 = 298\,\text{mm}^2$. Der Streufaktor und der Luftspaltfaktor sind dann

$$\sigma = \frac{F}{B_{\max} \cdot b} = \frac{2 \cdot 298}{50 \cdot 36{,}6} = 0{,}337$$

und

$$k = \frac{1}{1 - \dfrac{\sigma b}{a + b}} = \frac{1}{1 - \dfrac{0{,}337 \cdot 36{,}6}{85{,}4}} = 1{,}17.$$

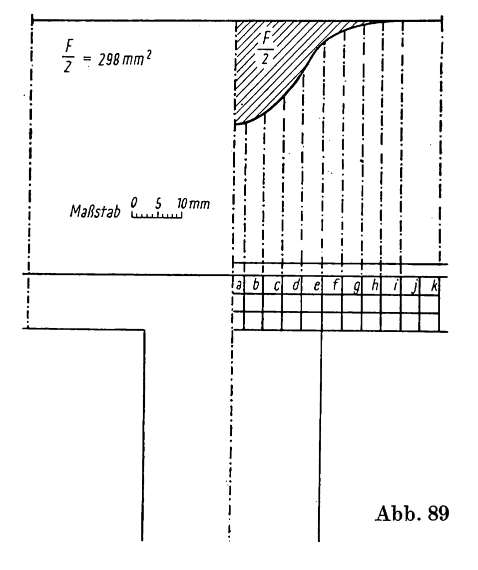


Abb. 89

Diese Werte sind kleiner als die berechneten. Der Grund dafür ist, daß die Potentiale der Eckpunkte des gröberen Netzes nur Näherungswerte sind und daß die dazwischenliegenden Potentialwerte in Abb. 86 längs der Linie 0–a–b–0 geschätzt wurden. Das Ergebnis kann verbessert werden, wenn man das feinere Netz in die Nut hinein um ein bis zwei Stufen des gröberen Netzes ausdehnt. Die Fehler der Potentiale der unteren Eckpunkte des gröberen Netzes beeinflussen dann wesentlich weniger die Werte des feineren Netzes in Nähe der Polgrenze. Eine Verbesserung von etwa 1% in der Bestimmung von k rechtfertigt jedoch diese Mehrarbeit nicht. Ist dagegen auch der Verlauf des Kraftlinienbildes im Feldabschnitt von Interesse, kann man mit Hilfe des erweiterten Netzes an den Ecken der Nutenöffnung ein annehmbares Bild erhalten.

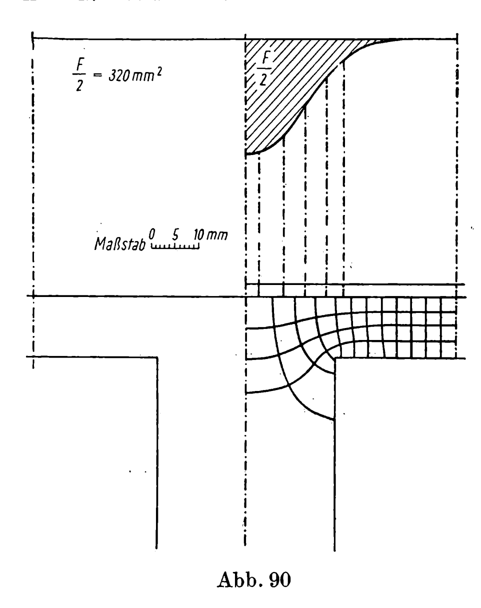


Abb. 90

d) graphisch (27.)

In Abb. 90 ist das Netz der Kraft- und Niveaulinien nach dem Verfahren der „krummlinigen Quadrate“ konstruiert worden. Im Luftspalt sind nur drei Niveaulinien angenommen, und das ziemlich grobe Flußbild ist in kurzer Zeit schematisch aufgezeichnet. Die Resultate stimmen trotzdem recht gut mit den Werten der genauen, aber langwierigen Berechnungsmethode nach Punkt a überein. Die in halber Breite verlorene Flußfläche beträgt $F/2 = 320\ \mathrm{mm}^2$. Somit ist

$$\sigma = \frac{F}{B_{\max} \cdot b} = \frac{2 \cdot 320}{50 \cdot 36{,}5} = 0{,}351$$

und

$$k = \frac{1}{1 - \dfrac{\sigma b}{a + b}} = \frac{1}{1 - \dfrac{0{,}351 - 36{,}5}{85{,}3}} = 1{,}179.$$

Die Abweichung von der genauen mathematischen Berechnung ist kleiner als 1%.

e) experimentell (34.)

Das Flußbild der Nut kann experimentell mit einem Kompensator nach Abb. 91 (J. F. H. Douglas) bestimmt werden (Lit. X [2]). Man schneidet die Form des Feldabschnittes aus gleichmäßig dünnem Blech aus Wider-

standsmaterial aus. Dann legt man an das Probestück erst entsprechend Zeichnung a der Abb. 92, dann entsprechend Zeichnung b eine Spannung. Auf dem Blech werden dabei mit Hilfe eines Schleifdrahtkompensators die Punkte gleicher Spannung abgetastet. Ihre Verbindung ergibt im Falle a die Niveaulinien und im Falle b die Kraftlinien. Das auf diese Art gewonnene Flußbild wurde von DOUGLAS bei Nutenformen verschiedener Abmessungen ausgewertet. Die Ergebnisse wurden in Kurvenform dargestellt. Die Versuche ergaben für das hier betrachtete Beispiel einen Luftspaltfaktor $k = 1{,}18$.

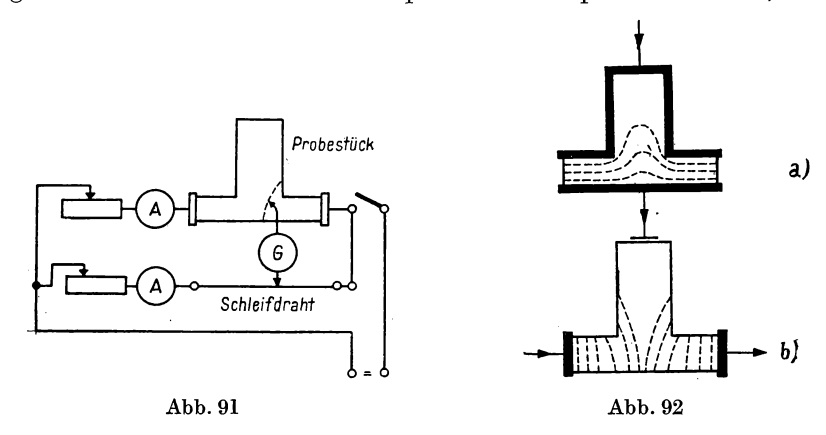


Abb. 91 Abb. 92

Beispiel 24

Wie groß ist die Feldstärke in den Punkten I, II, III in Abb. 93, wenn im Leiter 1 des in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks liegenden symmetrisch belasteten dreiphasigen Leitersystems der Strom gerade seinen Maximalwert hat und der Leiterstrom 100 A beträgt?

Im betrachteten Zeitpunkt betragen die Momentanwerte der Ströme:

$$i_1 = 141\,\text{A}, \quad i_2 = -70{,}7\,\text{A}, \quad i_3 = -70{,}7\,\text{A}.$$

Für Punkt I gilt dann (Abb. 94)

$$H_{\text{I}} = \left| \frac{i_2}{2\pi a} \mathfrak{t}_2 + \frac{i_3}{2\pi a} \mathfrak{t}_3 \right| = 2 \frac{i_2}{2\pi a} \cos 30^0 = 2 \cdot \frac{70{,}7}{314} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}39 \frac{\text{A}}{\text{cm}},$$

für Punkt II:

$$H_{\text{II}} = \left| \frac{i_1}{2\pi \frac{a}{2} \frac{1}{\cos 30^0}} \mathfrak{t}_1 + \frac{i_2}{2\pi \frac{a}{2} \frac{1}{\cos 30^0}} \mathfrak{t}_2 + \frac{i_3}{2\pi \frac{a}{2} \frac{1}{\cos 30^0}} \mathfrak{t}_3 \right|$$

$$= \frac{141}{314 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{70{,}7}{314 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = 1{,}17 \frac{\text{A}}{\text{cm}},$$

für Punkt III:

$$H_{\mathrm{III}} = \left| \frac{i_1}{2\pi \frac{a}{2}} \mathfrak{t}_1 + \frac{i_2}{2\pi \frac{a}{2}} \mathfrak{t}_2 + \frac{i_3}{2\pi a \cos 30^0} \mathfrak{t}_3 \right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{141}{157} + \frac{70{,}7}{157}\right)^2 + \left(\frac{70{,}7}{314 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2} = 1{,}37 \, \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}.$$

Abb. 93

Dabei sind die $\mathfrak{t}_k$ die tangentialen Einheitsvektoren zum Kreise der Leiter in den Punkten I, II, III.

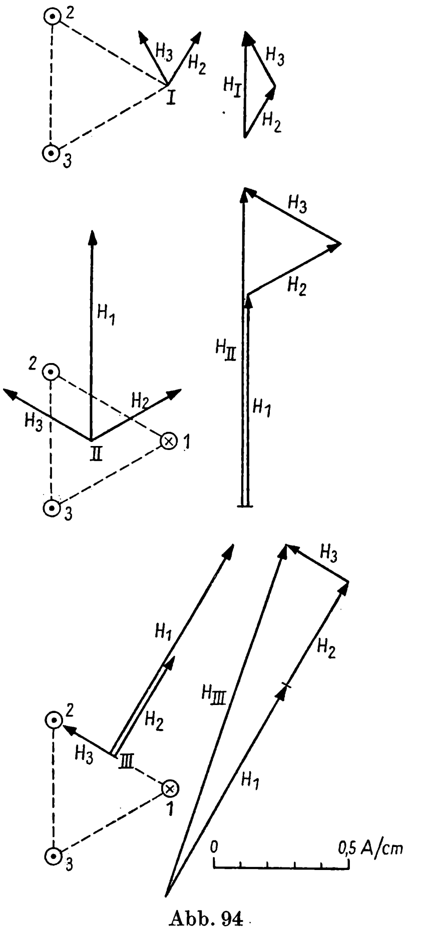


Abb. 94

Beispiel 25

Es soll die Feldstärke längs der Achse eines langen Solenoids mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes berechnet werden.

In der Achse eines einzelnen kreisförmigen Leiters ist die Resultierende der radialen Komponente der Feldstärke Null. Zur axialen Komponente trägt nach Abb. 95 an der Stelle A das Element $r\,d\alpha$ bei mit einem Wert

$$d\,H_a = \frac{i \sin(a\,ds)\,ds}{4\pi a^2} \sin\beta.$$

Aus der Zeichnung entnimmt man $a^2 = r^2 + x^2$ und $\sin\beta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}$; die Draufsicht ergibt $\sin(a\,ds) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Daraus findet man die Feldstärke im Abstand x vom Mittelpunkt zu

$$H_x = \int_0^{2\pi} \frac{i_1 r\,d\alpha}{4\pi(r^2 + x^2)} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{i r^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \, d\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{i r^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \alpha \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{i r^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ist die Solenoidspule kontinuierlich gewickelt, dann ist der Strom des Abschnittes dx gleich

$$di = w \cdot i \cdot \frac{dx}{s},$$

so daß

$$dH_x = \frac{1}{2} \frac{r^2 w i \frac{dx}{s}}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wird.

Im Punkt A der Achse einer Spule mit der Länge s nach Abb. 96 findet man die resultierende Feldstärke, wenn man die letzte Gleichung in den Grenzen

$$-\left[\frac{s}{a} + a\right] \quad \text{bis} \quad \left[\frac{s}{a} - a\right]$$

integriert.

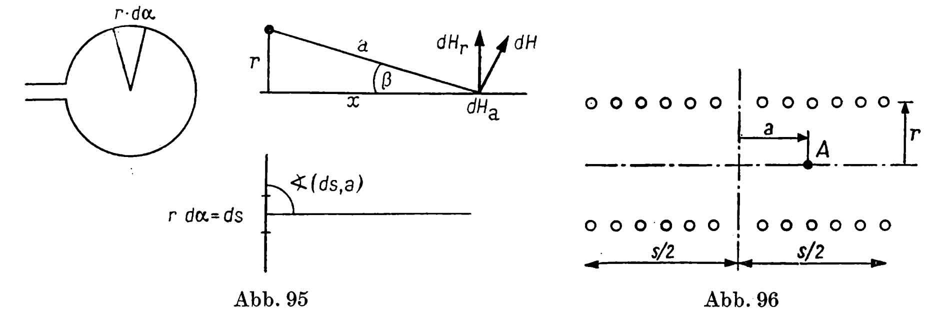


Abb. 95 Abb. 96

Es wird dann

$$H = \frac{wi}{2s} \int\limits_{-\left(\frac{s}{a}+a\right)}^{\frac{s}{a}-a} \frac{r^2\,dx}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{wi}{2s} \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right]_{-\left(\frac{s}{a}+a\right)}^{\frac{s}{a}-a}$$

$$= \frac{wi}{2s} \left[\frac{\frac{s}{2} - a}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{s}{2} - a\right)^2}} + \frac{\frac{s}{2} + a}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{s}{2} + a\right)^2}}\right].$$

Im Mittelpunkt der Spule ist $a = 0$ und

$$H_{a=0} = \frac{wi}{\sqrt{4r^2 + s^2}} \approx \left(\frac{wi}{s}\right)_{s \gg r}.$$

Am Ende der Spule ist $a = \frac{1}{2}$ und

$$H_{a=\frac{1}{2}} = \frac{wi}{2\sqrt{r^2 + s^2}} \approx \left(\frac{wi}{2s}\right)_{s \gg r}.$$

Beispiel 26

Es soll das magnetische Feld eines rechtwinklig gebogenen Leiters gefunden werden. Nach Abb. 97 werden nacheinander die Beiträge der vier Abschnitte a, b, c, d des Leiters zur Feldstärke im Punkte P berechnet und dann addiert. Der Beitrag des Stromes des Leiterabschnittes ds zur resultierenden Feldstärke ist proportional dem Flächeninhalt des Dreiecks mit der Höhe ϱ und der Grundlinie $\varrho\, d\vartheta$ (Beispiel 22c). Die Fläche, die der Wirkung der in n einzelne Teile unterteilten Leiterabschnitte entspricht, ist

$$F_n = \int_{\vartheta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\varrho^2\, d\vartheta = \int_{\vartheta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2a_n}\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2a_n}\cos\vartheta_n .$$

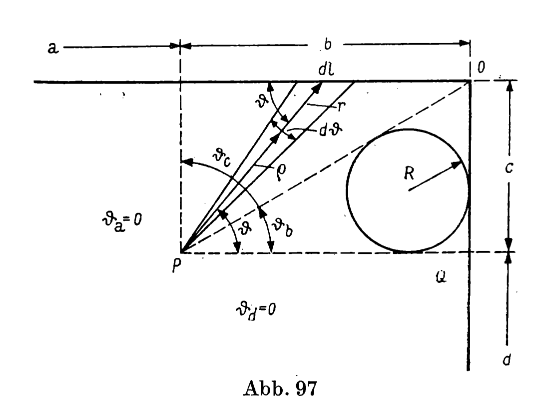


Abb. 97

Dabei ist

$$\varrho^2 = \frac{1}{r} = \frac{\sin\vartheta}{a_n},$$

wobei die a_n die senkrechten Entfernungen der einzelnen Abschnitte vom Punkt P sind. Für diese gilt

$$a_b = c, \quad a_c = b, \quad a_a = c,$$
$$a_d = b.$$

Die Feldstärke im Aufpunkt P ist

$$H = \frac{2i}{4\pi}\sum_n F_n = \sum \frac{i}{4\pi a_n}\cos\vartheta_n .$$

Aus der Abbildung entnimmt man

$$\cos\vartheta_a = 1, \quad \cos\vartheta_b = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

$$\cos\vartheta_d = 1, \quad \cos\vartheta_c = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Damit erhält der Ausdruck für die Feldstärke die Form

$$H = \frac{i}{4\pi}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\frac{1}{c} + \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\frac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{i}{4\pi}\,\frac{b + c + \sqrt{b^2+c^2}}{b\cdot c}.$$

Der Radius R des von dem Dreieck OPQ umschriebenen Kreises ist das Verhältnis des doppelten Flächeninhaltes zum Umfang L des Dreiecks

$$R = \frac{2F}{L} = \frac{bc}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Der Vergleich der beiden letzten Gleichungen liefert den Zusammenhang

$$H = \frac{i}{4\pi} \cdot \frac{1}{R}.$$

Die Eckpunkte aller rechtwinkligen Dreiecke, die um Kreise mit gleichem Halbmesser R gezeichnet werden können, beschreiben demnach Linien, für

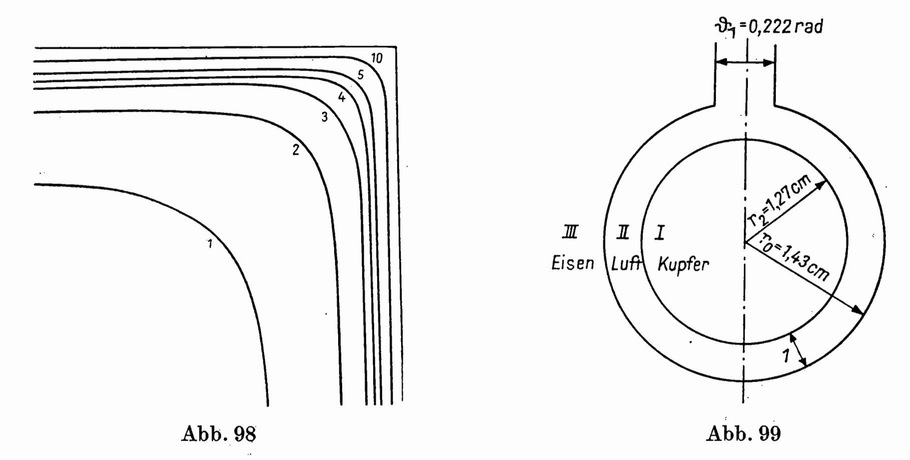


Abb. 98 Abb. 99

die H = const ist. In Abb. 98 sind einige auf diese Weise konstruierte Linien angegeben.

Beispiel 27* (20.)

Dieses Beispiel von F. Rhea dient zur Erläuterung der rechnerischen Bestimmung des magnetischen Feldes aus den Grenzbedingungen, die mit Hilfe der Fourier-Reihen berechnet werden.

Es wird hier nur der Hauptgang der Berechnung angegeben. Interessant ist auch ein von W. Rogowski angegebenes ähnliches Beispiel, bei dem die Streuung von Transformatoren mit Hilfe von Fourier-Reihen berechnet wird. Die sehr langwierige detaillierte Rechnung ist auch bei A. R. Stevenson, G. E. Rev. 1926, S. 797 bis 804, nachzulesen. (Weiteres Schrifttum im Literaturverzeichnis unter K.)

Es soll das Flußbild einer Kreisnut mit den in Abb. 99 angegebenen Abmessungen berechnet werden. Die Stromdichte in Kupfer sei gleichmäßig und

die Permeabilität des Eisens unendlich. Die Aufgabe ist dann als gelöst anzusehen, wenn ein solcher Ausdruck für das Vektorpotential gefunden wird, der

1. innerhalb des Kupfers (I) die POISSONsche Gleichung,
2. in der Luft (II) die LAPLACEsche Gleichung befriedigt,
3. an der Grenze Kupfer–Luft wegen der unveränderten Permeabilität stetig ist,
4. längs des begrenzenden Kreisbogens mit dem Radius r_0 den Grenzbedingungen entspricht.

Gelingt es, einen solchen Ausdruck zu finden, dann sind die Linien A = const die gesuchten Kraftlinien. Die einzelnen Bedingungen werden jetzt nacheinander betrachtet.

1. Innerhalb des Kupfers (I) gilt die POISSONsche Gleichung. Sie lautet in Polarkoordinaten r und ϑ ausgedrückt (nach ROTHE, Höhere Mathematik, 9. Aufl. 1949, Bd. I, S. 123), wenn $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{G}$ gleichgerichtet sind,

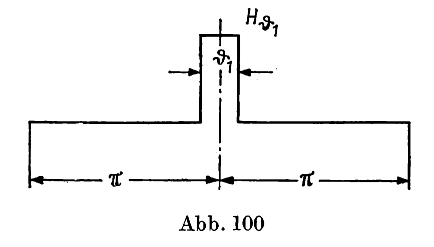


Abb. 100

$$\frac{\partial^2 A'}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A'}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A'}{\partial r} = -G.$$

2. Analog gilt in Luft (II) die LAPLACEsche Gleichung

$$\frac{\partial^2 A'}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A'}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A'}{\partial r} = 0.$$

3. Die tangentialen und normalen Komponenten der Feldstärke sind an der Grenze von I und II stetig.
4. Wegen der unendlichen Permeabilität ist die auf das Eisen entfallende magnetische Spannung am Kreis mit dem Radius r_0 Null. Die gesamte Durchflutung der Nut entfällt also auf die Öffnung der Nut. Nimmt man die Feldstärke mit einer gewissen Vernachlässigung längs der Öffnung der Nut als konstant an, so folgt daraus

$$H_{\vartheta_1} = \frac{i}{r_0 \vartheta_1}.$$

In Abb. 100 ist die Änderung der Tangentialkomponente der Feldstärke längs des abgewickelten Umfanges der Nut angegeben. Diese Kurve, die die Grenzbedingung angibt, wird durch die FOURIER-Reihe

$$H_\vartheta = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} c_\nu \cos \nu \vartheta$$

beschrieben. c_0 bedeutet den Mittelwert der Kurve, c_ν die Amplitude der ν-ten Harmonischen. Diese Bedingungen werden befriedigt durch die Funktion

$$A' = A_1' + A_2'.$$

Dabei ist A_1' der Betrag des Vektorpotentials eines einzigen Leiters und A_2' eine Funktion, die die Bedingungen 2 und 4 befriedigt. Im Abschnitt 2.223 (15)

ist gezeigt worden, daß die Kurven konstanten Vektorpotentials bei Flächenaufgaben mit den Linien der Feldstärke zusammenfallen. Die Differenz der Vektorpotentiale zwischen zwei Punkten ist also gleich dem Fluß der Feldstärkelinien zwischen den beiden Kraftlinien, die durch diese Punkte verlaufen. Innerhalb eines einzelnen zylindrischen Leiters wird unter der Annahme, daß am Ort $r = 0$ der Wert von A' gleich Null sei,

$$A_1'^{\mathrm{I}} = \int_0^r H\,dr = \int_0^r \frac{i\,r}{2\pi r_2^2}\,dr = \frac{i}{4\pi}\left(\frac{r}{r_2}\right)^2.$$

Außerhalb gilt

$$A_1'^{\mathrm{II}} = \int_{r_2}^r H\,dr + \frac{i}{4\pi}\,\frac{r_2^2}{r_2^2} = \frac{2i}{4\pi}\left[\ln\frac{r}{r_2} + \frac{1}{2}\right].$$

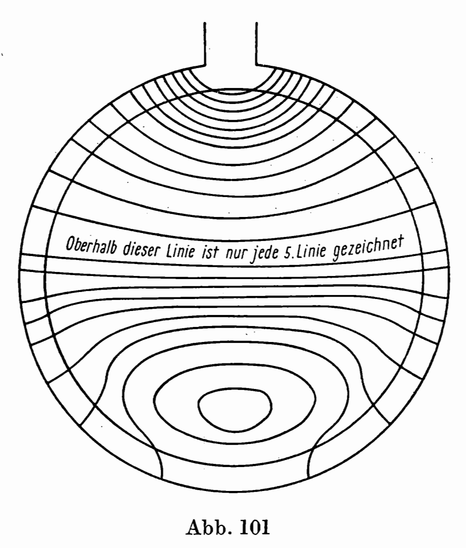


Abb. 101

Die Bedingungen 2 und 4 werden in beiden Bereichen befriedigt durch

$$A_2' = b_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu}(b_\nu \cos\nu\vartheta + a_\nu \sin\nu\vartheta)\,.$$

Für den Bereich I gilt also die Funktion

$$A'^{\mathrm{I}} = A_2' + A_1'^{\mathrm{I}},$$

für den Bereich II gilt

$$A'^{\mathrm{II}} = A_2' + A_1'^{\mathrm{II}}.$$

Bestimmt man aus den Grenzbedingungen die Konstanten mit Ausnahme von b_0, dann ist

$$A'^{\mathrm{I}} = b_0 + \frac{1}{4\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{8i}{\nu^2\vartheta_1}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu}\left[\sin\frac{\nu\vartheta_1}{2}\right]\cos\nu\vartheta + \frac{i}{4\pi}\left(\frac{r}{r_2}\right)^2,$$

$$A'^{\mathrm{II}} = b_0 + \frac{1}{4\pi}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{8i}{\nu^2\vartheta_1}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu}\left[\sin\frac{\nu\vartheta_1}{2}\right]\cos\nu\vartheta + \frac{2i}{4\pi}\left[\ln\frac{r}{r_2} + \frac{1}{2}\right].$$

In diese Gleichungen werden dann die verschiedenen Werte von r und ϑ eingesetzt. Durch jedes Wertepaar r und ϑ wird ein Punkt im Nutenquerschnitt bedingt. Aus den so gewonnenen Punkten werden diejenigen ausgesucht, für die $A = \text{const}$ ist, und miteinander verbunden. Das Ergebnis muß schließlich noch so abgeändert werden, daß b_0 im Kern Null wird. Auf diese Weise erhält man das Flußbild in Abb. 101.

Beispiel 28

Dieses Beispiel soll die Anwendung der SCHWARZschen Transformation erläutern.

Es soll das Flußbild in der Nähe einer rechtwinkligen Eckgrenzlinie eines Feldes in Luft mit Hilfe der konformen Abbildung berechnet und gezeichnet werden.

Da die Grenzlinien Gerade sind, kann die SCHWARZsche Transformation angewendet werden. Das Koordinatensytsem der Ebene $w = u + \mathrm{j}v$ wird so aufgetragen, daß die betrachtete Ecke in den rechten oberen Quadranten fällt (Abb. 102). Die übrigen drei Quadranten seien mit Eisen unendlicher Permeabilität ausgefüllt. Es ist eine solche Transformation zu suchen, daß die reelle

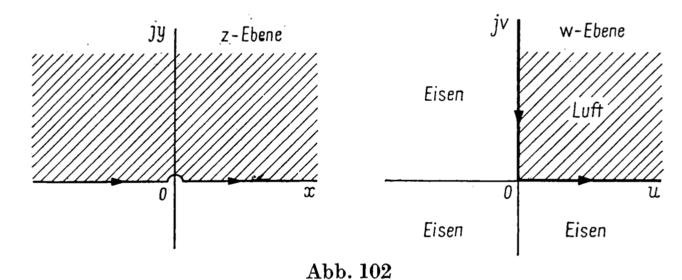


Abb. 102

Achse einer $z = x + \mathrm{j}y$-Ebene in das gewählte Vieleck der w-Ebene, nämlich in die positive Hälfte der u- und v-Achsen und die Halbebene über der reellen Achse der z-Ebene in den durch die Ecke begrenzten Teil der w-Ebene überführt wird. Dann kennzeichnen die für gleiche Wertdifferenzen gewählten, mit den Koordinatenachsen parallelen Geraden der z-Ebene die Linien „gleichen Flusses" bzw. gleichen Potentials. Diese werden durch die Transformation in die gesuchten Niveau- und Kraftlinien der w-Ebene überführt. Die zur y-Achse parallelen Geraden der z-Ebene sind dann die Flußlinien. Sie stehen auf der z-Ebene senkrecht zur x-Achse und treffen daher auf die w-Ebene in der der x-Achse entsprechenden Grenzlinie ebenfalls senkrecht auf. Die parallel zur x-Achse in gleichen Abständen gewählten Geraden gehen auf der w-Ebene in die Flußlinien über. Das Vieleck der w-Ebene besitzt eine einzige Brechung im Ursprungspunkt. Man bewegt sich am Vieleck von positiven v-Werten zu Null und von da an in Richtung der positiven u-Werte. Diesem Umlaufsinn entspricht im Ursprung $+\pi/2$, d.h. $\gamma = +1/2$. Wenn man den dem Ursprungspunkt der w-Ebene entsprechenden Punkt auf der z-Ebene ebenfalls in den Ursprungspunkt legt, lautet demnach die Transformationsgleichung

$$\frac{dw}{dz} = \frac{C}{(z - 0)^{\frac{1}{2}}}.$$

Durch Integration erhält man

$$w = C_1 \sqrt{z}.$$

Da hier nur die Form des Feldbildes interessiert, kann die Integrationskonstante vernachlässigt werden. (Es werden nur die Linien $\frac{w}{C_1} = \sqrt{z}$ gezeichnet.) In der z-Ebene werden bestimmte Punkte angenommen und die entsprechenden Werte von w berechnet. Dann werden alle Punkte, für die $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ ist, miteinander verbunden. Diese Kurven sind die gesuchten Fluß- bzw. Niveau-Linien. Zweckmäßigerweise werden die Punkte der z-Ebene entlang der Geraden $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ angenommen.

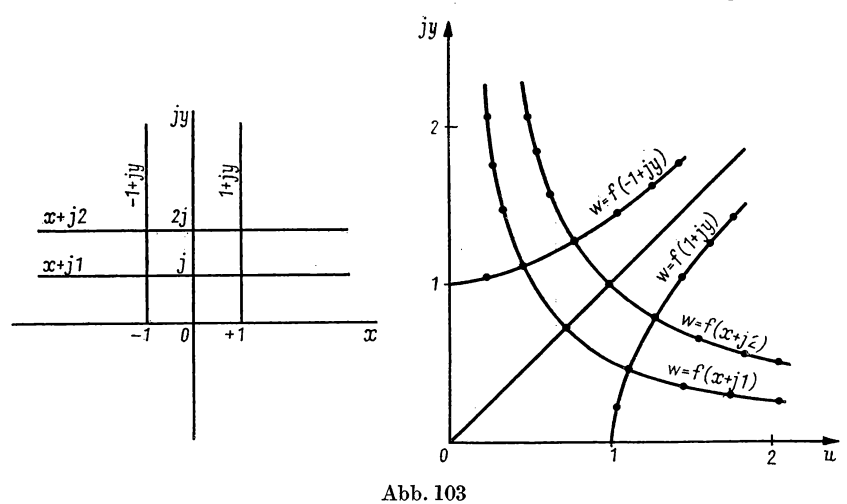


Abb. 103

Abb. 103 zeigt die den Geraden $-1 + jy$ und $+1 + jy$ entsprechenden Flußlinien und die den Geraden $x + j1$ bzw. $x + j2$ entsprechenden Äquipotentiallinien. Die berechneten Werte sind in der Tabelle 9 zusammengestellt.

Einfacher kann man zum Ziele gelangen, wenn man aus der Gleichung $\frac{w}{C_1} = \sqrt{z}$ die Fluß- und Niveaulinien analytisch bestimmt. Es ist nämlich

$$z = x + jy = \frac{w^2}{C_1^2} = \frac{(u + jv)^2}{C_1^2} = \frac{u^2 - v^2}{C_1^2} + j\frac{2uv}{C_1^2}.$$

Die Linien für $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ werden dann in der w-Ebene die Hyperbeln

$$u^2 - v^2 = \text{const} \qquad \text{und} \qquad 2uv = \text{const}$$

sein. Diese sind leicht aufzuzeichnen.

Beispiel 29

Dieses Beispiel von L. Dreyfuss soll die Anwendung der Schwarzschen Transformation erläutern.

Tabelle 9

$\frac{w}{C_1} = \mathrm{f}(x + \mathrm{j}\,1)$

$z = x + \mathrm{j}y$	$-4 + \mathrm{j}1$	$-3 + \mathrm{j}1$	$-2 + \mathrm{j}1$	$-1 + \mathrm{j}1$	j	$1 + \mathrm{j}1$	$2 + \mathrm{j}1$	$3 + \mathrm{j}1$	$4 + \mathrm{j}1$
$\sqrt{z} = \frac{w}{C_1}$	$0{,}245 + \mathrm{j}2{,}02$	$0{,}28 + \mathrm{j}1{,}75$	$0{,}35 + \mathrm{j}1{,}45$	$0{,}46 + \mathrm{j}1{,}1$	$0{,}71 + \mathrm{j}0{,}7$	$1{,}1 + \mathrm{j}0{,}46$	$1{,}45 + \mathrm{j}0{,}35$	$1{,}75 + \mathrm{j}0{,}28$	$0{,}245 + \mathrm{j}2{,}02$

$\frac{w}{C_1} = \mathrm{f}(x + \mathrm{j}\,2)$

$z = x + \mathrm{j}y$	$-4 + \mathrm{j}2$	$-3 + \mathrm{j}2$	$-2 + \mathrm{j}2$	$-1 + \mathrm{j}2$	$\mathrm{j}2$	$1 + \mathrm{j}2$	$2 + \mathrm{j}2$	$3 + \mathrm{j}2$	$4 + \mathrm{j}2$
$\sqrt{z} = \frac{w}{C_1}$	$0{,}472 + \mathrm{j}2{,}06$	$0{,}55 + \mathrm{j}1{,}82$	$0{,}61 + \mathrm{j}1{,}55$	$9{,}78 + \mathrm{j}1{,}27$	$1 + \mathrm{j}1$	$1{,}27 + \mathrm{j}0{,}78$	$1{,}55 + \mathrm{j}0{,}61$	$1{,}82 + \mathrm{j}0{,}55$	$2{,}06 + \mathrm{j}0{,}472$

$\frac{w}{C_1} = \mathrm{f}(-1 + \mathrm{j}y)$

$z = x + \mathrm{j}y$	-1	$-1 + \mathrm{j}0{,}5$	$-1 + \mathrm{j}$	$-1 + \mathrm{j}2$	$-1 + \mathrm{j}3$	$-1 + \mathrm{j}4$	$-1 + \mathrm{j}5$
$\sqrt{z} = \frac{w}{C_1}$	j	$0{,}245 + \mathrm{j}1{,}03$	$0{,}46 + \mathrm{j}1{,}1$	$0{,}78 + \mathrm{j}1{,}27$	$1{,}04 + \mathrm{j}1{,}44$	$1{,}25 + \mathrm{j}1{,}6$	$1{,}43 + \mathrm{j}1{,}75$

$\frac{w}{C_1} = f(1 + \mathrm{j}y)$ ist das Spiegelbild der Kurve $\frac{w}{C_1} = f(-1 + \mathrm{j}y)$ an der Symmetriegeraden unter 45°. Die Tabelle ist unter Benutzung der Beziehung

$$\sqrt{x + \mathrm{j}y} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} + \mathrm{j}\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}$$

berechnet worden.

Es ist die Verteilung der Induktion längs des in Abb. 104 skizzierten Ständerpreßringes eines Turbogenerators zu bestimmen. Hieraus soll dann der im Ring entstehende Wirbelstromverlust berechnet werden. Der Preßring 1 und der Schild 2 im Ständer bestehen aus unmagnetischem Material. Die Schutzkappe des Rotors ist teilweise magnetisch. Das Flußbild ist nach den unter Punkt (30) angegebenen Konstruktionsvorschriften berechnet und gezeichnet. Das Kraftlinienbild senkrecht zur Zeichenebene kann

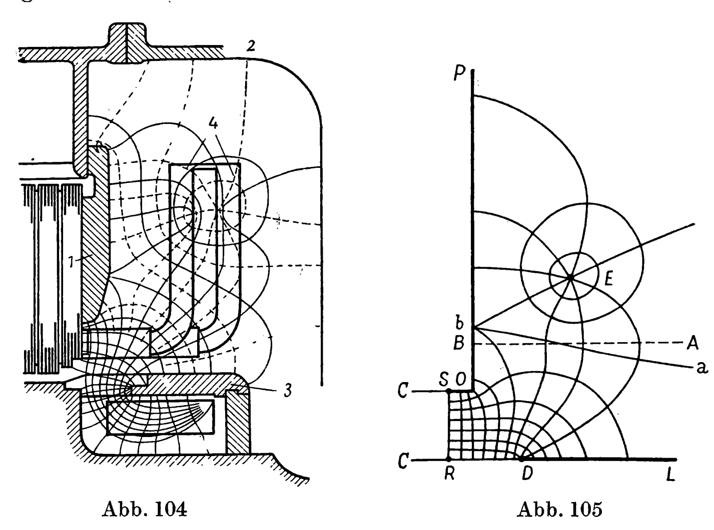


Abb. 104 Abb. 105

wegen der großen Abmessungen als homogen betrachtet werden. Die ausgezogenen Linien stellen die Induktionslinien, die gestrichelten die Niveaulinien dar. Nach Vereinfachung der Grenzlinien und des Durchflutungsbildes wird das Kraftlinienbild durch das Flußbild der einfacheren Anordnung in Abb. 105 ersetzt. Dazu werden die Wickelköpfe des Ständers 4 durch einen Leiter mit kreisförmigem Querschnitt ersetzt, der Ständerschild fortgelassen, das Feld nach unten durch die gerade Linie DL der etwas magnetischen Schutzkappe des Rotors und durch die Kraftlinie DC begrenzt. Die Ständerzähne werden durch die Niveaulinie RS ersetzt. Die Linie SOP bildet die Grenzlinie des Preßringes. Gesucht ist die Verteilung der Induktion längs dieser Linie, die sich ins Unendliche erstreckt.

Oberhalb der Kraftlinie a–b schließt sich jede Flußlinie um den Wicklungskopf, unterhalb laufen alle Flußlinien von den Statorzähnen in die Rotorkappe. Die Kraftlinie a–b wird durch die Waagerechte A–B ersetzt, und beide Feldabschnitte werden getrennt betrachtet.

1. Unterer Feldabschnitt: Streuung des Rotors

Der untere Feldabschnitt wird gesondert gezeichnet. Die Grenzlinie $ABOC$ der $z = x + \mathrm{j}y$-Ebene wird auf die reelle Achse der $z' = x' + \mathrm{j}y'$-Ebene über-

führt. Dabei entsprechen A', B', ... den Punkten A, B, ... (Abb. 106 und 107). Die Winkel betragen $\frac{\pi}{2}$ im Punkt B, $-\frac{\pi}{2}$ im Punkt 0 und π im Punkt C. Die Transformationsgleichung lautet also

$$\frac{dz}{dz'} = \frac{C}{[z' - (-\beta)]^{\frac{1}{2}} \cdot (z' - 0)^{-\frac{1}{2}} (z' - 1)^1} = -C \frac{\sqrt{z'}}{(1 - z') \cdot \sqrt{\beta + z'}} .$$

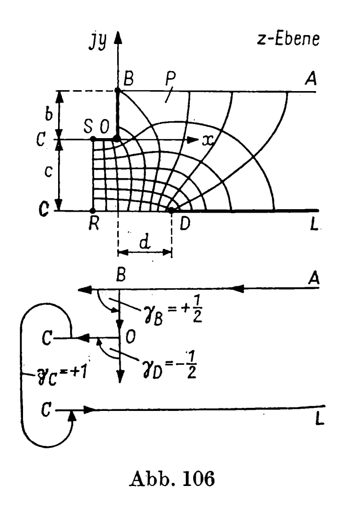


Abb. 106

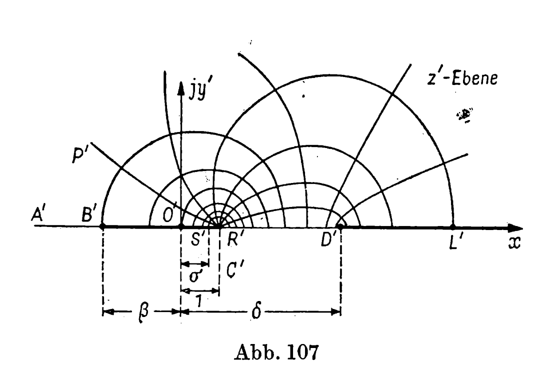


Abb. 107

Die z'-Ebene wird nun in eine Ebene $z'' = x'' + \mathrm{j}y''$ transformiert. In dieser bilden die Induktions- und Niveaulinien ein Netz aus rechtwinkligen Geraden: $L, D, R, C \sim L'', D'', R'', C''$. Mit den in Abb. 108 eingezeichneten Winkeln ergibt sich

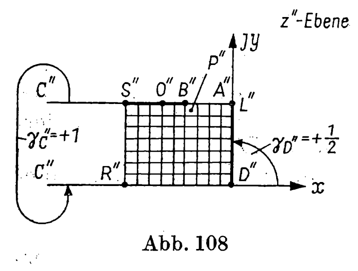


Abb. 108

$$\frac{dz''}{dz'} = \frac{K}{(z' - 1)^1 (z' - \delta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= K \frac{1}{(1 - z') \cdot \sqrt{\delta - z'}} .$$

Die Koordinaten x'' und y'' eines beliebigen Punktes der z''-Ebene bedeuten die magnetische Spannung und den Fluß in diesem Punkte. Die zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden sind nämlich die Linien Φ = const und V = const. Infolgedessen ist nach Gleichung (2.17)

$$B = -\mu_0 \operatorname{grad} V = \mu_0 \left[\frac{dz''}{dz}\right]^* = \mu_0 \left[\frac{K}{C} \sqrt{\frac{\beta + z'}{z'(\delta - z')}}\right]_k .$$

2. Oberer Feldabschnitt: Streuung des Ständers

Der obere Feldabschnitt kann einfacher berechnet werden, wenn er mit seinem Spiegelbild zum Feld eines Doppelleiters ergänzt wird, der parallel zu einer Ebene mit unendlicher Leitfähigkeit liegt (Abb. 109). Die Kraft- und Niveaulinien sind hierbei vertauscht. Der reelle Wickelkopf mit der Durchflutung Θ würde entlang der y-Achse die Induktion

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\Theta}{\sqrt{(y-e)^2+f^2}}\,\frac{f}{\sqrt{(y-e)^2+f^2}}=\frac{\mu_0\Theta}{2\pi}\,\frac{f}{(y-e)^2+f^2},$$

das Spiegelbild die Induktion

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{\Theta f}{(y+e)^2+f^2}$$

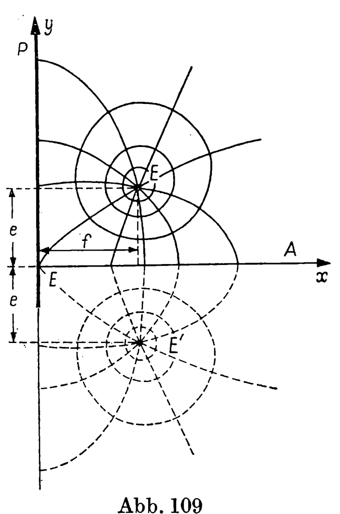


Abb. 109

erzeugen. Die Resultierende beider ist die tatsächliche Induktion

$$B_y=\frac{\mu_0\Theta}{2\pi}\left[\frac{f}{(y-e)^2+f^2}-\frac{f}{(y+e)^2+f^2}\right].$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Der Wirbelstromverlust in 1 cm Tiefe senkrecht zur Zeichenebene beträgt

$$N=A\int|B^2|\,|dz|\,.$$

Dabei ist A eine von der Frequenz, der spezifischen Leitfähigkeit und der Permeabilität des Materials des Preßringes abhängige Konstante. Die unter 1. und 2. berechneten Werte von B müssen in diese Formel eingesetzt werden. Im ersten Fall muß zwischen $z'=0$ und $z'=\sigma$, dann zwischen $z'=0$ und $z'=-\beta$, im zweiten Fall zwischen $z'=b$ und $z=\infty$ integriert werden. β und σ werden aus der integrierten Transformationsgleichung gewonnen. Bei der Berechnung ist die magnetische Spannung für verschiedene Werte von b und β längs der Grenzlinie A–B auszurechnen. Ist der Wert richtig, dann sind beide gleich. Zur besseren Anschaulichkeit ist in den Abbildungen auch das ungefähre Kraftlinienbild eingezeichnet.

Beispiel 30

Das magnetische Feld zweier gleichgroßer Ströme, die in gleicher Richtung fließen, soll schematisch gezeichnet werden.

Die Ebene, in denen die Achsen der beiden Leiter mit kleinem Querschnitt verlaufen und die Ebene, die senkrecht zu den Achsen auf dem Halbierungsabstand liegt, sind aus Symmetriegründen Flächen konstanten Potentials. Die Aufzeichnung der Niveaulinien kann bei den Leitern begonnen werden.

Werden gleiche Potentialsprünge angenommen, so gehen diese mit gleicher Winkelteilung radial von der Oberfläche aus, da dann Kreissektoren gleicher Durchflutung zwischen ihnen liegen. Aus großer Entfernung betrachtet, können die beiden Leiter durch einen ersetzt werden, der im Mittelpunkt der sie verbindenden Geraden liegt. Den vom Ersatzleiter ausgehenden Geraden, die untereinander gleiche Winkel einschließen, nähern sich die Niveaulinien der Leiter asymptotisch. Die Annäherung ist in der Nähe der Leiter steiler und wird in weiterer Entfernung immer flacher. Die Kraftlinien sind in der Nähe der Leiter annähernd Kreise. Ebenso in großer Entfernung, da sie dort wieder als Kraftlinien des Ersatzleiters gedacht werden können. Dazwischen haben sie eine Übergangsform (Abb. 110). Unter den Kraftlinien, die die einzelnen und beide Leiter umgeben, gibt es eine Übergangslinie mit einem Singularitätspunkt im Zentrum. Damit sind die allgemeinen formalen Bedingungen festgelegt. Außerdem müssen die Kraftlinien die Niveaulinien überall senkrecht schneiden und mit ihnen „krummlinige Quadrate" bilden. Die einzelnen Leiter würden in einem Punkte im Abstand a_1 bzw. a_2 jeweils die Induktion

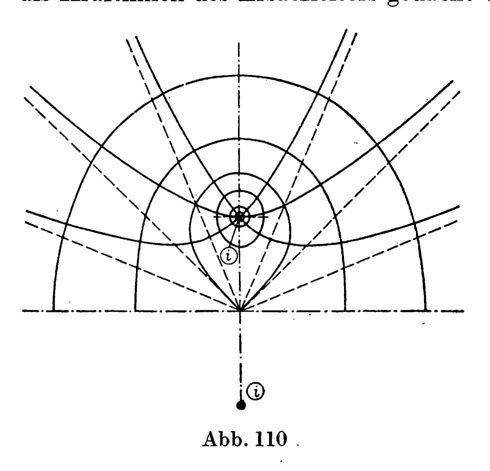


Abb. 110

$$\mu_0 \frac{i}{2\pi a_1} \quad \text{bzw.} \quad \mu_0 \frac{i}{2\pi a_2}$$

in der Richtung der Tangente an die Kreise mit dem Radius a_1 bzw. a_2 erzeugen. Die tatsächliche Induktion ist die Resultierende aus beiden Induktionen. Durch diesen Zusammenhang können die einzelnen Punkte der Kraftlinien kontrolliert werden.

Beispiel 31

Das Flußbild zweier paralleler Leiter mit kleinem Durchmesser, deren Ströme sich wie 1 : 2 verhalten, soll schematisch gezeichnet werden. Die Ströme sollen a) entgegengesetzte, b) gleiche Richtung haben.

a) Man zeichnet zuerst die Äquipotentiallinien. Das Potential wächst bei einem Umlauf um den rechten Leiter mit i, um den linken Leiter mit $2i$ an. Geht man von den einzeln betrachteten Strömen aus und zeichnet die auf gleiche Potentialdifferenzen entfallenden Linien, so muß man diese radialen Strahlen so zueinander zeichnen, daß sie um den linken Stromleiter halb so große Winkel einschließen wie um den rechten. In der Abb. 111 sind die vom Stromleiter, der von $2i$ durchflossen wird, ausgehenden Strahlen mit Winkeln von $\frac{\pi}{16}$ und die vom Stromleiter, der vom Strom i durch-

flossen wird, mit Winkeln von $\frac{\pi}{8}$ gezogen. Die Potentialdifferenz zwischen den einzelnen Linien beträgt $V = \frac{i}{16}$. Im Schnittpunkt der Strahlen ist das resultierende Potential gleich der Summe der Potentiale der einzelnen Ströme. Verbindet man die Schnittpunkte mit gleichen resultierenden Potentialwerten und glättet die so gewonnene gebrochene Linie, so erhält man die Niveaulinien des Systems. In der Abbildung sind z. B. die Äquipotentiallinien $V = 6$ durch Verbindung der Schnittpunkte 1 und 5, 2 und 4, 3 und 3, 4 und 2, 5 und 1 gezeichnet. Die Induktionslinien verlaufen überall senkrecht zu den Äquipotentiallinien. Sie können daher leicht nach dem Verfahren der „krummlinigen Quadrate" eingezeichnet werden (obere Hälfte der Abb. 111). Mit Hilfe dieser Methode kann schnell eine zweckentsprechende Abbildung hergestellt werden. Wird das resultierende Feld mehrerer Ströme gesucht, dann addiert man zu dem zunächst konstruierten Bild zweier Ströme das Magnetfeld des dritten Stromes usw.

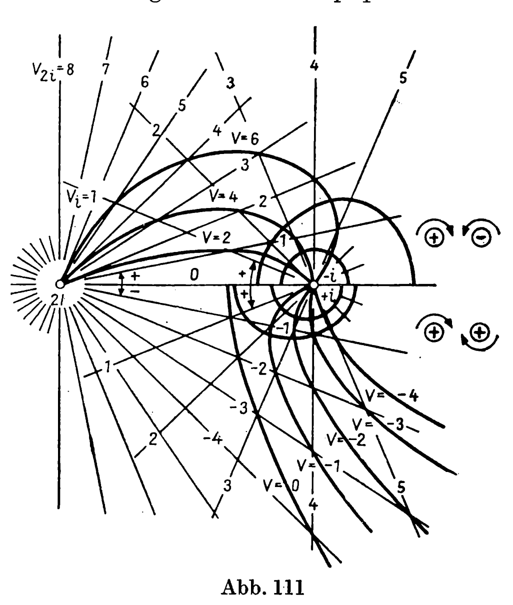


Abb. 111

b) In der unteren Hälfte der Abb. 111 ist das magnetische Feld der von den Strömen $2i$ und $+i$ durchflossenen Leiter dargestellt. Man geht dabei genauso vor wie unter a), muß jedoch das geänderte Vorzeichen beachten. Geht man wieder von i aus, so erhält man z. B. die Äquipotentiallinie $V = 1$ durch Verbindung der Punkte $-1+2$, $-2+3$, $-3+4$.

Beispiel 32

Das Flußbild in der Nähe eines Eisenecks soll nach der Methode der „krummlinigen Quadrate" gezeichnet werden (Abb. 112).

Im Eckpunkt 0 ist die Dichte der Kraftlinien unendlich. Man ersetzt die Ecke daher durch einen Kreisbogen mit kleinem Radius. Die Kraftlinie, die mit den Grenzlinien des Eisens jeweils einen Winkel von 135° bildet, teilt die Zeichnung in zwei symmetrische Hälften. Die netzförmigen Gebilde längs der Symmetrieflußlinie und diejenigen längs der Eisenfläche müssen ähnlich sein, da das Feldbild ein krummliniges quadratisches Netz bildet. Die Symmetrie-

flußlinie und die Winkelhalbierenden zwischen den Eisenflächen sind ebenfalls Symmetrielinien, die von den Kraft- und Niveaulinien unter einem Winkel von 45° geschnitten werden. Auf der Eisenfläche wird ein Punkt A gewählt, und davon ausgehend die Flußlinie ABC gezeichnet, die die Symmetrieflußlinie in B unter 45° schneidet. Senkrecht dazu wird die Niveaulinie DBE gezeichnet. Die Flußlinie, die von F ausgeht, muß so gelegt werden, daß das „Quadrat" $ABEF$ entsteht. In G muß sie wieder mit der Symmetrieflußlinie einen Winkel von 45° bilden. Dann kann die Niveaulinie HCG gezeichnet werden. Falls erforderlich, werden die Abstände halbiert und dadurch die Ab-

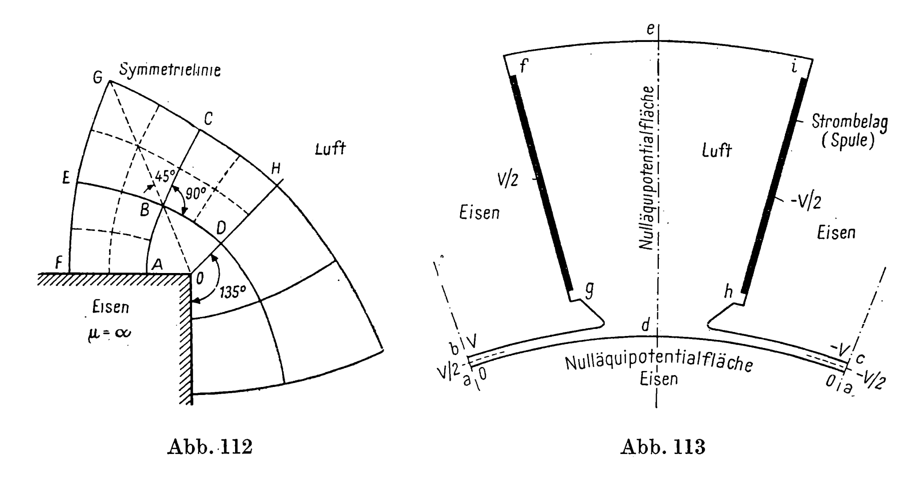


Abb. 112 Abb. 113

bildung verfeinert. Die Form des Feldabschnittes $OABDO$ scheint auf den ersten Blick kein „Quadrat" zu sein. Teilt man jedoch weiter auf, so sieht man, daß die so gewonnenen kleinen „Quadrate" die richtige Gestalt haben.

Beispiel 33

Dieses Beispiel dient zur Erläuterung der Spiegelung. Ein Stromleiter mit kleinem Querschnitt befindet sich in der Nähe einer ebenen Eisenfläche. Die Permeabilität des Eisens wird als unendlich angenommen, so daß die Kraftlinien senkrecht auf die Eisenfläche treffen und diese eine Niveaulinie bildet. Die Verteilung der Kraftliniendichte ist jedoch entlang der Grenzlinie des Eisens nicht bekannt. Die Anordnung entspricht aber genau der oberen Hälfte in der Abb. 110. Durch Spiegelung wird die Aufgabe auf dieses bekannte Kraftlinienbild zurückgeführt. Das Eisen wird dazu entfernt, daß man das Spiegelbild des Stromes symmetrisch zur ehemaligen Trennungsebene Luft–Eisen anordnet. Größe und Richtung des spiegelbildlichen Stromes sind mit denen des ursprünglichen identisch. Die obere Hälfte des magnetischen Flußbildes ist das Kraftlinienbild des Leiters in Luft in der Nähe des Eisens.

Beispiel 34

Es soll das Flußbild der in Abb. 113 skizzierten Anordnung gezeichnet werden. Daraus ist dann die Verteilung der Induktion längs der Linie *a–a* zu bestimmen. Es handelt sich dabei um die Verteilung der Induktion im Luftspalt einer leerlaufenden Gleichstrommaschine. Die Wirkung der Zähne wird vernachlässigt. Die Aufgabe kann folgendermaßen gelöst werden (Abb. 114):

1. Die Spule wird durch einen unendlich dünnen gleichmäßigen Strombelag ersetzt.
2. Die Permeabilität des Eisens wird als unendlich angenommen. Dadurch werden die Eisenflächen, abgesehen von dem mit Strombelag versehenen Teil, überall zu Niveauflächen.
3. Das Potential der Linie *a–a* auf dem Anker wird gleich Null gesetzt.
4. Das Potential der Linie *d–e* ist aus Symmetriegründen dann ebenfalls Null.
5. Das Potential verteilt sich folgendermaßen: Ausgehend von der Linie *e–f*, die Nullpotential hat, wächst die magnetische Spannung unter der Wirkung der Spule des linken Pols bei *g–b* auf $+V$ an. Im Luftspalt fällt das Potential auf Null, bleibt entlang der Linie *a–a* Null und fällt dann durch den Luftspalt bei *c* auf $-V$. Von *h* bis *i* steigt es dann unter der Wirkung der Spule des rechten Pols wieder auf Null an.

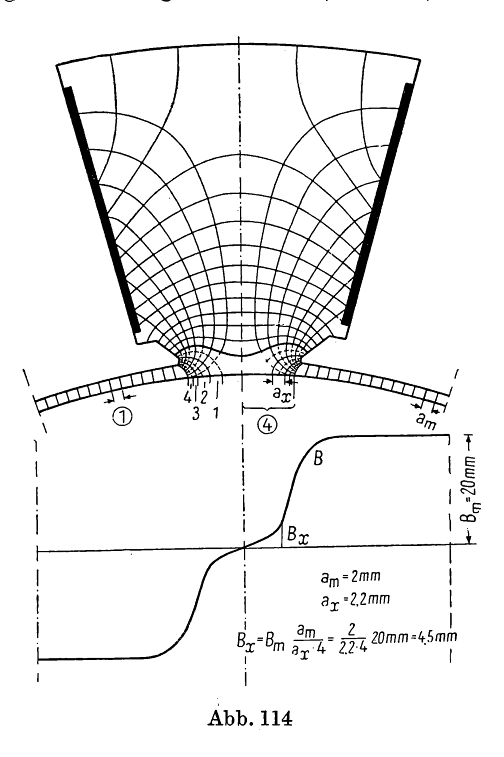


Abb. 114

6. Im Luftspalt unter den Polmitten fällt die magnetische Spannung gleichmäßig. $V/2$ liegt also auf der Mittellinie. Diese Äquipotentiallinie muß nach ihrer Biegung um den Polschuh den Punkt $V/2$ in der Spulenmitte treffen. Die übrigen Äquipotentiallinien gehen in gleichen Abständen von den Spulen aus und teilen den Luftspalt in gleiche Abschnitte.
7. Die Eintrittswinkel der Niveaulinien längs *g–f* bzw. *i–h* können nur geschätzt werden. Eine Überprüfung ist nach (27) möglich.
8. Nach der angenäherten Zeichnung der Niveaulinien werden die Kraftlinien so eingetragen, daß sie die gezeichneten Äquipotentiallinien und die

Mittellinie d–e und die blanken Eisenflächen überall senkrecht schneiden. Das Netz besteht dann, wenn man vom strombegrenzten Teil absieht, überall aus „Quadraten".

9. Die Flußlinien und die Niveaulinien treffen nicht unter einem Winkel von 90° auf f–g bzw. h–i auf. Sie laufen jedoch auch hier zueinander senkrecht.
10. Das Bild wird dann so lange korrigiert, bis man im Luftraum überall Quadrate hat und für die Kupferflächen die Bedingung $H_{tl} \approx -A$ erfüllt ist.

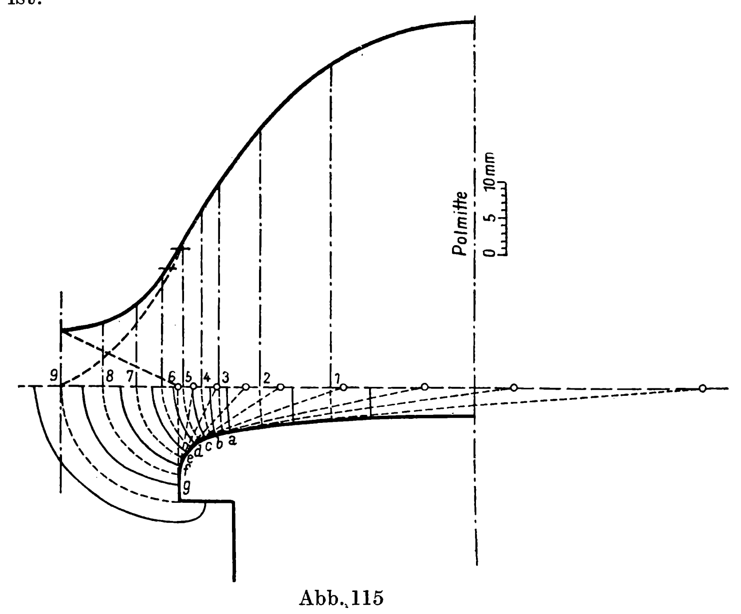


Abb. 115

11. Die Verteilung der Normalkomponente der Induktion längs a–a kann man z. B. aus den Verhältnissen der entsprechenden Breiten von Röhren mit identischen Flüssen entnehmen. Das gröbere, dick ausgezogene Flußbild wird dazu in der Pollücke verfeinert, so daß z. B. ein Kanal zwischen den beiden Polschuhen in 4 bzw. 8 Teilröhren aufgeteilt wird. Zur Verdeutlichung des Rechenganges ist in Abb. 114 die Berechnung des relativen, in Millimeter gegebenen Induktionswertes an der Stelle x ausgeführt.

Beispiel 35 (28.)

Es ist die Induktionsverteilung einer Synchronmaschine längs des Ankers bei Vernachlässigung der Wirkung der Nuten zu bestimmen. Abb. 115 zeigt die Abwicklung des Umrisses der Maschine.

Die Punkte a, b, c, d, e, f, g werden auf der Polfläche so gewählt, daß sie bei stärkerer Krümmung dichter nebeneinander liegen. Die Kreisbögen, deren

Mittelpunkte in den Schnittpunkten der von hier aus gezogenen Tangenten und der abgewickelten Ankerfläche gefunden werden, stellen die Kraftlinien dar. Zwischen je zwei Kraftlinien befindet sich eine Flußröhre. Die „Mittellinien“ der Flußröhren sind ebenfalls Kraftlinien und münden in die Punkte 1 bis 9 des Ankers. Die Induktion in diesen Punkten soll berechnet werden. Dazu wird in der Zeichnung von jeder Mittellinie die Sehne h und der Radius r gemessen, ferner die Breite a_1 der Flußröhren am Anker und die Breite a_2 an der Polfläche. Für die Verhältnisse r/h und a_1/a_2 entnimmt man aus der Kurvenschar in Abb. 31 den Multiplikationsfaktor k. Die Länge der äquivalenten, parallelwandigen Kraftlinienröhre gleicher Leitfähigkeit ist dann

$$s' = kh$$

und die Induktion im Punkt x

$$B_x = B_0 \frac{s_0'}{s_x'},$$

worin B_0 die Induktion in der Polmitte und s_0' die Länge des Luftspaltes bedeuten. Im Beispiel beträgt die B_0 entsprechende Länge 50 mm. Bezieht man hierauf die Werte von B_x, so erhält man die relativen Werte von B_x in Millimeter. Die Berechnung ist in Tabelle 10 zusammengefaßt.

Tabelle 10

	r mm	h mm	a_1 mm	a_2 mm	$\frac{r}{h}$	$\frac{a_1}{a_2}$	k	$s_x' = kh$ mm	$B_x = 50\text{ mm} \cdot \frac{s_0'}{s_x'} = \frac{50 \cdot 3{,}8}{s_x'}$ mm
1	50,2	4,3	10	9,9	11,7	1,01	~1	4,3	44,2
2	33,8	5,4	9,1	8,6	6,26	1,05	~1	5,4	35,2
3	27,7	6,4	2,2	2	4,3	1,1	1,02	6,63	28,6
4	18,6	6,9	2,3	1,65	2,7	1,395	1,135	7,82	24,3
5	13,8	7,8	2,5	1,35	1,7	1,85	1,24	10	19
6	11,3	9,3	2,9	1,7	1,22	1,7	1,22	11,35	16,7
7	11,3	12	4,3	1,7	0,94	2,5	1,415	17	11,2
8	12,2	16,3	5,4	2,8	0,75	1,93	1,36	22,2	8,6
9	16,1	22,8	5,1	5,1	0,7	1	1,115	25,5	7,45

Bei der Durchführung dieses Beispieles sind drei Vernachlässigungen gemacht worden. Erstens sind die Kraftlinien durch Kreisbögen ersetzt worden. Vergleicht man dieses nach dem Verfahren von F. Unger konstruierte Flußbild mit einer Abbildung, die nach dem Verfahren von Lehmann hergestellt wurde, so sieht man, daß die Näherung bei den in der Nähe der Polecken austretenden Kraftlinien nur einen kleinen Fehler verursacht. Er wird an der Streuung der Punkte 5 und 6 in der Abbildung deutlich. Zweitens wurde die Wirkung des benachbarten Pols vernachlässigt. Wegen der Symmetrie soll in

der Mittellinie der Pollücke die Normalkomponente der Induktion Null sein. Auf dieser Strecke, die bis zum Polrand reichen kann, ist die Kurve offensichtlich falsch. Man kann die Kurve korrigieren, indem man, am Polrand beginnend, linear wachsende Beträge abzieht. In der Abbildung sind die Korrektionsgerade und die richtige resultierende Kurve gestrichelt gezeichnet. Die dritte Vernachlässigung besteht darin, daß die Durchflutung auf dem Pol nicht berücksichtigt wurde und daß sich die magnetische Spannung längs des Polkerns ändert. Ihre Wirkung ist jedoch gering und kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden.

Beispiel 36

Es soll das Kraftlinienbild im Kupfer und das magnetische Feld zweier paralleler Leiter mit großem kreisförmigem Querschnitt gleicher Stromrichtung und gleicher Stromdichte bestimmt werden (Abb. 116).

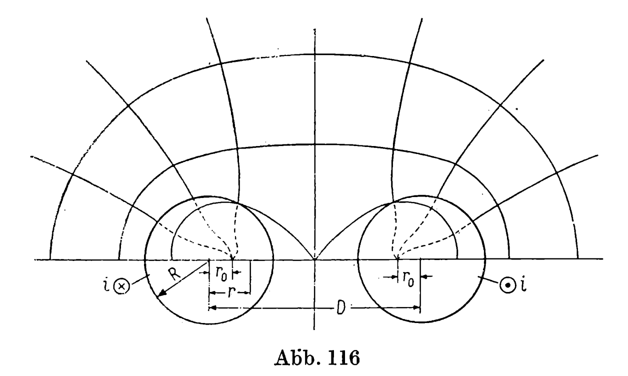


Abb. 116

Das Feld außerhalb der Leiter entspricht dem zweier Leiter mit kleinem Querschnitt, die in der Achse der Leiter liegen (Beispiel 30). Im Innern der Leiter muß zuerst der Ort des Kerns gesucht werden. Das ist in vorliegendem Fall durch Berechnung möglich. Die Kerne liegen auf der Geraden, die die Mittelpunkte der beiden Leiter verbindet. Wegen der gleichen Richtung der Ströme sind sie jeweils zum anderen Leiter hin verschoben. Die Größe der Verschiebung r_0 ergibt sich aus der Tatsache, daß die Feldstärke im Kern Null ist. Im Innern des Leiters 1 entsteht im Punkt auf der Achse im Abstand r vom Mittelpunkt des Leiters unter der Wirkung des Stromes im Leiter 1 die Komponente der Induktion

$$B_1 = \mu_0 \frac{\dot{i}}{R^2} \frac{r}{2\pi} .$$

Der Strom im Leiter 2 verursacht im gleichen Punkt die Komponente

$$B_2 = \mu_0 \frac{\dot{i}}{2\pi (D - r)} .$$

Beide Komponenten verlaufen senkrecht zur verbindenden Geraden. Ihre Resultierende ist im Kern an der Stelle $r = r_0$ gleich Null:

$$B = 0 = B_1 - B_2 = \mu_0 \frac{i}{2\pi} \frac{r_0}{R^2} - \mu_0 \frac{i}{2\pi} \frac{1}{D - r_0}.$$

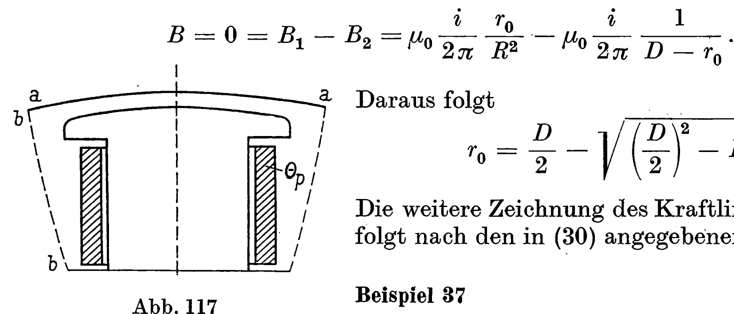


Abb. 117

Daraus folgt

$$r_0 = \frac{D}{2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - R^2}.$$

Die weitere Zeichnung des Kraftlinienbildes erfolgt nach den in (30) angegebenen Regeln.

Beispiel 37

Das Flußbild des in Abb. 117 skizzierten ausgeprägten Pols einer Synchronmaschine soll gezeichnet und daraus die Verteilung der Induktion längs des Ankers *a–a* und längs des Streuflusses zwischen den Polen *b–b* bestimmt werden. Die Permeabilität des Eisens sei unendlich, und aus Symmetriegründen sei die Gerade *b–b* eine Niveaulinie.

Aus Symmetriegründen genügt es, nur die eine Hälfte der Abbildung zu zeichnen. Die Lösung erfolgt nach einem von Schnildneck angegebenen Verfahren.

Gang der Lösung:

1. In Abb. 118 sind bei *a, b, c, d, e, f* senkrecht aus der Oberfläche tretende Flußlinien gezeichnet worden, die gefühlsmäßig so weitergeführt wurden, daß sie auf der gegenüberliegenden Fläche senkrecht auftreffen.
2. Das Wickelkupfer kann in beliebig viele Flächen unterteilt werden. In der Abbildung wurden acht Unterteilungen vorgesehen. Die Teilung erfolgt zweckmäßig so, daß die Teilungslinien etwa den arbeitsfreien Linien entsprechen. Sie stehen also auf den zu erwartenden Richtungen der Kraftlinien ungefähr senkrecht.
3. Nach dieser groben Einteilung werden sieben arbeitsfreie Linien so gezeichnet, daß sie die bereits gezeichneten Flußlinien überall senkrecht schneiden, den Biegungen des Eisens folgen und die scharfen Ecken abgerundet überbrücken (Abb. 119). Hierfür gibt es eine Analogie bei den Strömungslinien der Hydrodynamik. Die Flußlinien treffen sich alle im

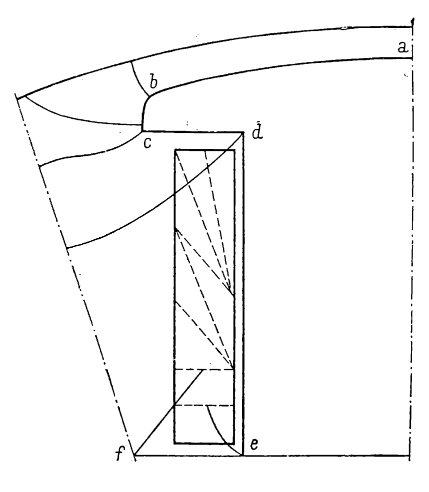


Abb. 118

Kern, der unter der Mitte der Kupferhöhe und in der Nähe des Eisens liegt. Das ist bereits aus der groben Einteilung zu ersehen. Die aufgeteilten Kupferflächen sind gleich.

4. Senkrecht zu den arbeitsfreien Linien werden so viele Kraftlinien gezeichnet, daß man in der Luft überall angenäherte Quadrate erhält. Die Zeichnung der Kraftlinien beginnt man im Luftraum und führt sie dann im Kupfer weiter (Abb. 120).

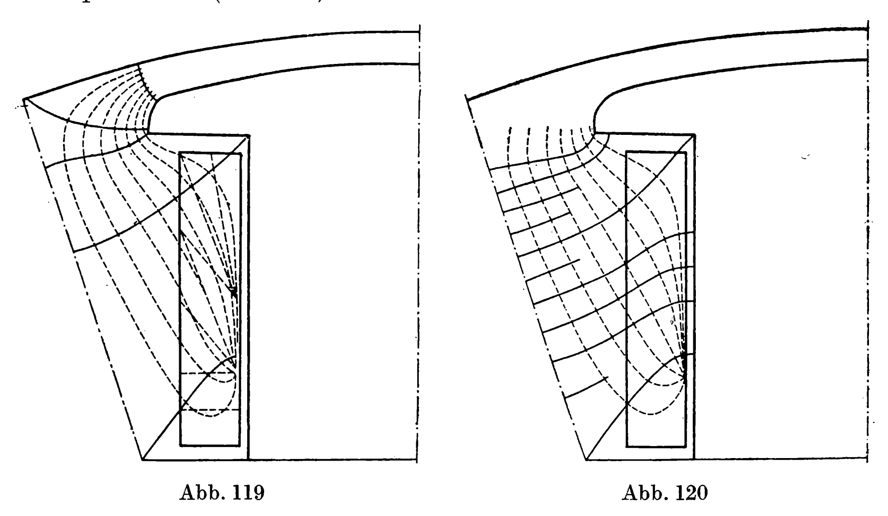


Abb. 119 Abb. 120

5. Danach wird das Netz so lange korrigiert, bis es überall den unter (31) angegebenen Anforderungen entspricht (Abb. 121).
6. Die Verteilung der Induktion längs der Linie a–a wird aus der Breite der Kraftlinienröhren berechnet und auf den Induktionswert im Mittelpunkt bezogen, der gleich 100% gesetzt wird. An der Stelle x ist die Induktion, wenn a_m die Breite der im Mittelpunkt liegenden Flußröhre und a_x die Breite an der Stelle x bedeuten,

$$B_x = 100 \frac{a_m}{a_x}.$$

Die gestrichelte Linie in Abb. 121 zeigt die experimentell aufgenommene Kurve.

Beispiel 38

Das Verfahren der Spiegelung bei endlicher Permeabilität des Eisens.

Das Flußbild von Beispiel 33 soll gezeichnet werden. Dabei betrage die Permeabilität des Eisens $\mu_2 = 19$.

Das Kraftlinienbild in der Luft wird wie im Beispiel 37 bestimmt. Der ge-

samte Raum wird mit Luft erfüllt und symmetrisch zum Leiter mit dem Strom i ein spiegelbildlicher Leiter mit dem Strom i_2 gedacht (Abb. 122). Zur Aufzeichnung des Kraftlinienbildes im Eisen denkt man sich das gesamte Volumen mit Eisen der Permeabilität μ_2 ausgefüllt. Außer dem Strom i soll ein entsprechend großer Strom $-i_1$ in entgegengesetzter Richtung fließen. Das Kraftlinienbild wird für die Differenz beider Ströme angegeben. Da die Permeabilität des Eisens endlich ist, kann das Kraftlinienbild in beiden Abschnittshälften nicht symmetrisch sein. Die Kraftlinien werden an den Grenzflächen gebrochen. i_2 kann daher nicht gleich i sein. i_1 kann auch nicht gleich i sein. Dies würde die Durchflutung Null bedeuten, und im Eisen wäre kein Fluß vorhanden. Die richtigen Werte der spiegelbildlichen Ströme werden von den Brechungsgesetzen bestimmt. In jedem Punkt der Grenzlinie ist

$$H_{t_1} = H_{t_2} \quad \text{und} \quad B_{n_1} = B_{n_2}.$$

In einem Punkt an der Grenzfläche, der in Luft und von i und i_2 jeweils im Abstand a liegt, ist die Tangentialkomponente der Feldstärke die Differenz der Komponenten der Feldstärke der beiden Ströme:

$$H_{t_1} = \frac{i}{2\pi a}\cos\alpha - \frac{i_2}{2\pi a}\cos\alpha$$

$$= \frac{\cos\alpha}{2\pi a}(i - i_2).$$

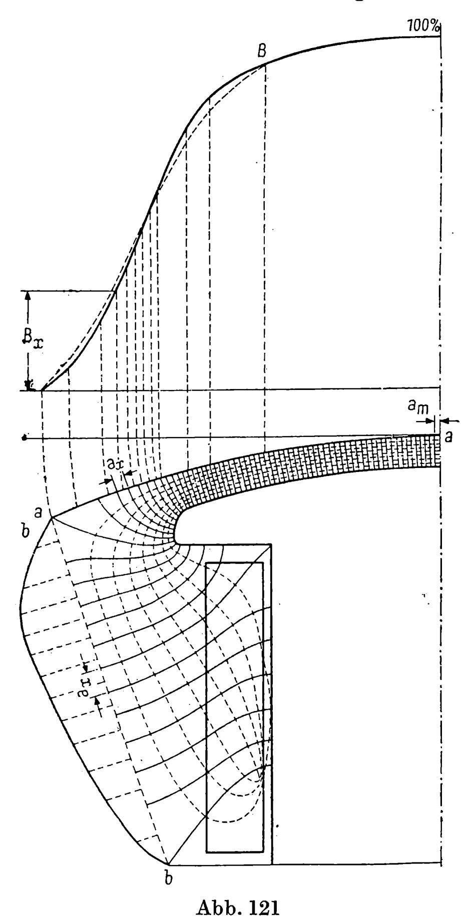


Abb. 121

Im gleichen Punkt ist auf der Seite des Eisens unter der Wirkung von i und i_1

$$H_{t_2} = \frac{i}{2\pi a}\cos\alpha + \frac{i_1}{2\pi a}\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{2\pi a}(i + i_1).$$

Diese beiden Tangentialkomponenten sind einander gleich:

$$H_{t_1} = H_{t_2} = \frac{\cos\alpha}{2\pi a}(i - i_2) = \frac{\cos\alpha}{2\pi a}(i + i_1).$$

Daher ist auch

$$i_1 = -i_2.$$

Die Normalkomponenten der Induktion können in gleicher Weise angegeben werden:

$$B_{n_1} = \frac{\mu_1}{2\pi}\left(\frac{i}{a}\sin\alpha + \frac{i_2}{a}\sin\alpha\right), \quad B_{n_2} = \frac{\mu_2}{2\pi}\left(\frac{i}{a}\sin\alpha + \frac{i_1}{a}\sin\alpha\right).$$

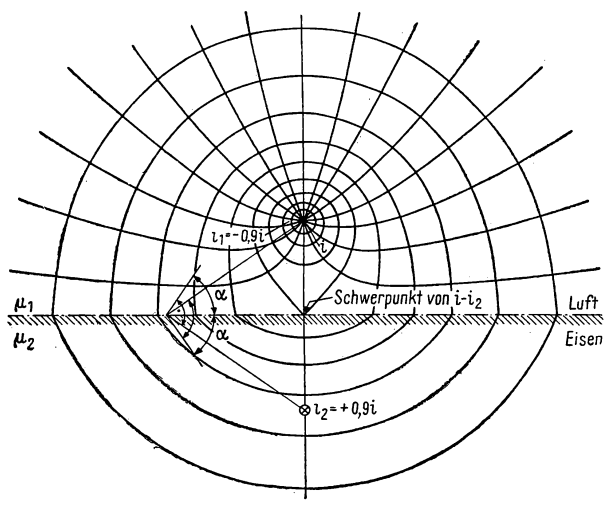


Abb. 122

Aus ihrer Gleichheit folgt

$$\mu_1 (i + i_2) = \mu_2 (i + i_1).$$

Wegen $i_1 = -i_2$ folgt

$$i_2 = i\,\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = i\,\frac{19 - 1}{19 + 1} = 0{,}9\,i.$$

Der Feldabschnitt in Luft wird zu den parallelen Leitern i und i_2 gezeichnet, wie es bereits für das magnetische Feld zweier gleichgroßer Ströme gleicher Richtung erklärt wurde. Dabei müssen aber die verschiedenen Größen von i und i_2 beachtet werden. Der im Eisen verlaufende Fluß ergibt ein Bild, als wäre er von der Differenz der Ströme i und i_1 in einem Material der Permeabilität μ_2 erzeugt. Die Kraftlinien sind konzentrische Kreisbögen um den Strom $i - i_1$.

Aufgabe 1

Es soll der magnetische und elektrische Kreis in Abb. 123 verglichen und die Grenzen der Analogie gesucht werden. Es soll die physikalische Bedeutung der analogen Größen geprüft und verglichen werden.

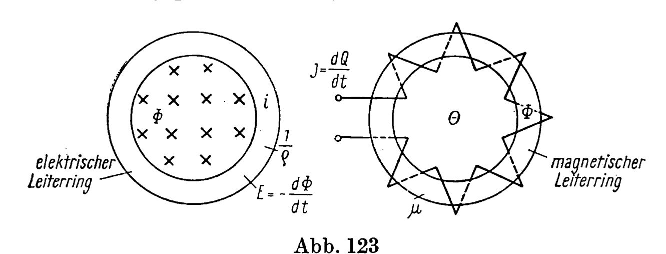


Abb. 123

Aufgabe 2

Es sind die elektrischen Kreise gesucht, die den magnetischen Kreisen der Beispiele 11, 20 und den Aufgaben 10, 17 und 20 entsprechen.

Aufgabe 3

Aus den Magnetisierungskurven in Abb. 12 soll die Änderung der Permeabilität des Dynamobleches und des Gußeisens als Funktion

a) der Induktion,
b) der Feldstärke

aufgezeichnet werden.

Aufgabe 4

Gesucht werden die Linien B und H eines durch einen Luftspalt unterbrochenen Eisenringes mit einer relativen Permeabilität $\mu_r = 8$ des Eisens. Es soll der Verlauf der Induktionslinie in einem Ring von $2{,}6 \times 0{,}385\ \text{cm}^2$ aus Transformatorenblech mit einem mittleren Durchmesser von 20 cm gezeichnet werden. Dieser Ring umgibt konzentrisch einen geraden Leiter, in dem ein Strom von 610 A fließt. Die Induktionslinien sollen außerdem gezeichnet werden, wenn der Ring einen Luftspalt von 1,05 mm hat. Man wählt eine Induktion von 1000 G für eine Linie und nimmt eine gleichmäßige Verteilung von B an.

Aufgabe 5

Auf einen Ring aus Dynamoblech mit einem mittleren Durchmesser von 20 cm und einem Querschnitt von 8 cm² werden 1000 dicht beieinanderliegende Windungen aufgewickelt. Unmittelbar auf diese Windungen wird eine gleichgroße Wicklung mit entgegengesetztem Wickelsinn und gleichen Klemmen aufgetragen.
Wie groß ist der Fluß im Ring, wenn

a) in der inneren Spule 2 A und in der äußeren Spule 5 A,
b) in beiden Spulen 2 A

fließen.

Lösung:

a) $\Phi = 132000$ M;
b) $\Phi = 0$.

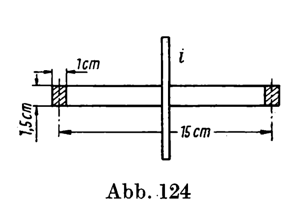


Abb. 124

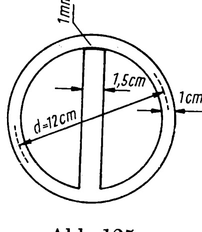


Abb. 125

Aufgabe 6

Gesucht ist der Fluß in einem Ring aus Transformatorenblech, wie in Abb. 124 dargestellt. In dem senkrechten geraden Leiter im Mittelpunkt des Ringes fließen 1000 A.

Lösung: $\Phi = 19700$ M.

Aufgabe 7

Die Abmessung des Eisenkerns aus Dynamoblech in Abb. 125 beträgt senkrecht zur Zeichenebene 1 cm. Auf den mittleren Schenkel sind 500 Windungen aufgetragen.
Wie groß ist der Strom, der im Luftspalt einen Fluß von 10000 M hervorruft?

Lösung: $i = 1{,}14$ A.

Aufgabe 8

Wie groß muß der Querschnitt eines Kupferdrahtes sein und welche Windungszahl muß eine Wicklung auf einem Ring aus Gußeisen mit einem Querschnitt von 2×2 cm² und einem mittleren Durchmesser von 10 cm haben, wenn der Ring einen Luftspalt von 1 mm Länge besitzt und hierin ein Fluß von

20000 M erzeugt werden soll? Die zur Verfügung stehende Spannungsquelle hat eine Spannung von 2,3 V. Die zulässige Stromdichte beträgt 2 A/mm². Dabei erreicht die Spule eine Temperatur von 75°C. Die Berechnung soll zuerst durchgeführt werden für einen Kupferdraht ohne Isolation.

Lösung: $F = 0{,}737\ \text{mm}^2$, $w = 666$.

Dann soll die gleiche Berechnung durchgeführt werden unter der Annahme, daß die Isolation eine Vergrößerung des Durchmessers von 0,33 mm bedingt.

Lösung: $F \approx 0{,}89\,\text{mm}^2$, $w \approx 555$.

Aufgabe 9

1. Gesucht ist die relative Permeabilität eines Ringes aus Dynamoblech mit den Abmessungen $s_k = 15$ cm, $F = 1 \times 4\,\text{cm}^2$. In der gleichmäßig auf den Ring verteilten Spule mit 150 Windungen fließt ein Strom von 1 A.
2. Wie groß ist die magnetische Leitfähigkeit des Ringes?
3. Wie muß der Erregerstrom verändert werden, damit die Leitfähigkeit verdoppelt wird?

Lösung:

1. $\mu_r = 1080$;
2. $\Lambda = 3{,}63 \cdot 10^{-6}$ H;
3. Verringerung auf etwa 0,4 A, dabei $\mu_r = 2150$.

Aufgabe 10

Es soll die Flußänderung eines in Abb. 126 skizzierten magnetischen Kreises aus Dynamoblech als Funktion des Erregerstromes unter folgenden Bedingungen angegeben werden:

1. ohne Luftspalt,
2. mit einem Luftspalt von 0,1 mm,
3. mit einem Luftspalt von 0,2 mm,
4. mit einem Luftspalt von 2 mm.
5. Es sind die gleichen Untersuchungen anzustellen, wenn der magnetische Kreis aus Gußeisen besteht.

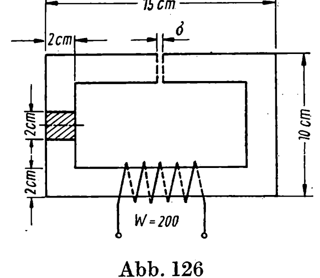


Abb. 126

Aufgabe 11

Durch welche Anordnung eines elektrischen Stromkreises kann das Flußbild eines durch einen Luftspalt unterbrochenen Eisenringes ersetzt werden, wenn die Größenordnung der Streu- und der nutzbaren Feldlinien richtig durch ein elektrisches Ersatzbild ersetzt wird.

Aufgabe 12

Welchen Querschnitt hat ein Ring aus Transformatorenblech mit einem mittleren Durchmesser von 15 cm, in dem mit einer Durchflutung von 100 A ein Fluß von 30000 M erzeugt wird?

Lösung: $F = 4{,}3\ \text{cm}^2$.

Aufgabe 13

1. Es soll die magnetische Leitfähigkeit eines Eisenringes aus Dynamoblech mit einem mittleren Durchmesser von 10 cm und einem geometrischen Querschnitt von $1 \times 1\ \text{cm}^2$, der durch einen Luftspalt von 2 mm unterbrochen ist, errechnet werden. Dabei ist angenommen, daß der Querschnitt des Luftspaltes infolge der Streuung in jeder Richtung mit der Länge des Luftspaltes wächst. Der Füllfaktor des Eisenringes beträgt wegen der aus Papierringen bestehenden Isolierung der Bleche 0,9 und der Fluß im Eisenring 17200 M.
2. Wie groß ist die magnetische Leitfähigkeit, wenn Füllfaktor und Streuung vernachlässigt werden?

Lösung:

1. $\Lambda = 3{,}66 \cdot 10^{-8}\ \text{H}$;
2. $\Lambda = 2{,}83 \cdot 10^{-8}\ \text{H}$.

Aufgabe 14

Auf Ringe aus verschiedenem Material mit einem mittleren Durchmesser von 10 cm und kleinem Querschnitt sind gleichmäßig und dicht nebeneinander 200 Windungen aufgewickelt.

Wie groß ist die Feldstärke und die Induktion in der Mittellinie des Ringes, wenn in der Spule jeweils ein Strom von 3 A fließt und das Material des Kernes aus

1. Luft,
2. Holz,
3. Kupfer,
4. Dynamoblech,
5. Transformatorenblech

besteht?

Lösung:

1., 2., 3.: $H = 19{,}1\ \text{A/cm}$, $B = 24\ \text{G}$;
4. $B = 14900\ \text{G}$;
5. $B = 13000\ \text{G}$.

Aufgabe 15

Unter idealen Verhältnissen ist der Eisenkörper des Stators einer elektrischen Maschine ein Eisenzylinder, in dessen Bohrung konzentrisch ein ungenuteter zylindrischer Anker liegt. Es soll die Induktionsverteilung längs des zwischen beiden Zylindern befindlichen Luftspaltes unter folgenden Voraussetzungen gezeichnet werden,

1. wenn auf dem Stator zwei Stromleiter von entgegengesetzter Richtung auf demselben Durchmesser liegen,
2. wenn auf zwei gegenüberliegenden Dritteln des Stators Leiter mit entgegengesetzt gerichteten Strömen liegen,
3. wenn die Leiter sich je auf halbem Umkreis befinden, weil der ganze Umfang bewickelt ist,
4. wenn je eine Phase der Dreiphasenwicklung den jeweils gegenüberliegenden Kreis mit einem Abstand von 60° besetzt und die Verteilung in verschiedenen Zeitpunkten gezeichnet wird. Die Permeabilität des Eisens soll in jedem Fall unendlich sein.

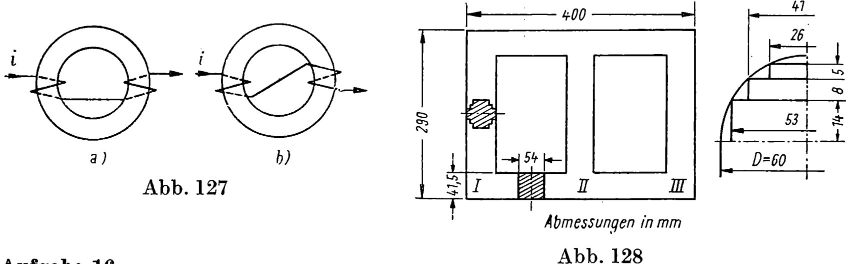


Abb. 127

Abb. 128

Aufgabe 16

Es soll das Kraftlinienbild des in Abb. 127 skizzierten Eisenringes schematisch gezeichnet werden.

Aufgabe 17

Im Schenkel III eines zur Mittellinie symmetrischen Transformatorenkerns (Abb. 128) soll eine Induktion von 8000 G hervorgerufen werden. Es soll die dazu notwendige Durchflutung angegeben werden, wenn die Erregerspule

1. auf dem Schenkel II,
2. auf dem Schenkel I

angeordnet ist. Die Abmessungen sind in Millimeter angegeben; der Eisenkern besteht aus Transformatorenblech mit einem Füllfaktor von 0,9. Die Streuung und der Einfluß der Stoßstellen im Kern sollen vernachlässigt werden.

Lösung:

1. $\Theta = 2120\,\text{A}$;
2. $\Theta = 2376\,\text{A}$.

Aufgabe 18

Wie groß ist die erforderliche Durchflutung im Falle 1 des Beispieles 17, wenn die Anordnung nicht symmetrisch ist, sondern die Mittellinie des mittleren Schenkels von der Mittellinie des Schenkels I um $^2/_3$ und von der Mittellinie des Schenkels III um $^1/_3$ entfernt liegt?

Lösung: $\Theta = 1085\,\mathrm{A}$.

Aufgabe 19

1. Wie groß ist der Strom, mit dem nach Abb. 129 eine auf dem mittleren Schenkel befindliche Spule von 100 Windungen gespeist werden muß, damit im rechten Schenkel eine Induktion von 5000 G erzeugt wird?

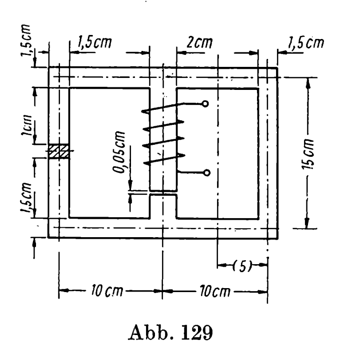


Abb. 129

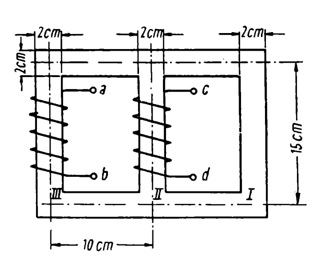


Abb. 130

2. Wie groß ist der erforderliche Strom, wenn der mittlere Schenkel nicht symmetrisch angeordnet ist, sondern die Entfernung seiner Mittellinie von der Mittellinie des rechten Schenkels 5 cm beträgt? Der Eisenkern besteht aus Dynamoblech.

Lösung:

1. $i \approx 3{,}69\,\mathrm{A}$;
2. $i \approx 2{,}89\,\mathrm{A}$.

Aufgabe 20

Auf den Schenkeln II und III eines senkrecht zur Zeichenebene 1 cm tiefen Körpers aus Gußeisen mit den in Abb. 130 angegebenen Dimensionen ist je eine Spule von 100 Windungen mit gleichem Wickelsinn angeordnet. Wie groß ist die Induktion im Schenkel I, wenn

1. die Wicklungsenden *b–c*,
2. die Wicklungsenden *b–d*

miteinander verbunden werden? An den jeweils freien Klemmen wird ein Strom von 2 A durch die Spule geleitet.

Lösung:

1. $B \approx 3500$ G;
2. $B \approx 1100$ G.

Aufgabe 21

In Abb. 131 ist das Äußere und die schematische Darstellung eines zur Förderung von magnetischem Material vorgesehenen Hebemagneten gezeigt. Der Magnet soll in einem Abstand von 1 cm eine Zugkraft von 0,5 t ausüben. Die Induktion im Eisen wird zu 12500 G und in der Luft zu 4600 G gewählt.

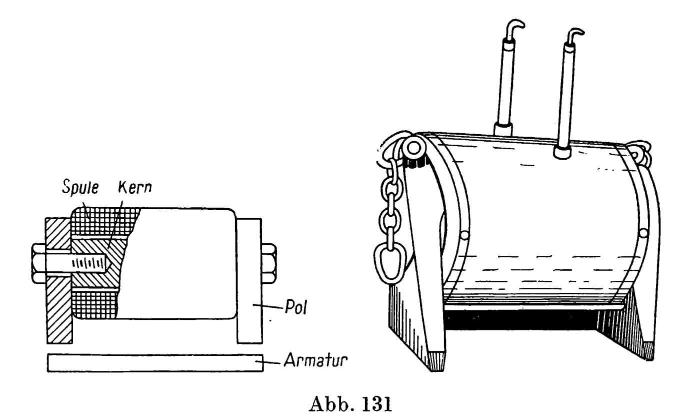


Abb. 131

Wie groß muß der Querschnitt des Kernes und des Poles des Magneten und die Windungszahl der Spule unter der Annahme sein, daß die auf das Eisen entfallende magnetische Spannung 25% der auf den Luftspalt entfallenden Spannung beträgt? Die Spule hat bei einer Speisespannung von 220 V einen Verlust von 3 kW. Die Zugkraft soll nach der Näherungsformel

$$P \approx \left(\frac{B}{5000}\right)^2 \cdot F$$

berechnet werden.

Lösung: 109 cm², 2 × 296 cm², $w = 676$.

Aufgabe 22

Es soll der Spulenquerschnitt des in Abb. 132 skizzierten Zugmagneten berechnet werden, wenn der Magnet in einer Entfernung von 2,5 cm eine Kraft von 50 kg auf einen zylindrischen Anker auszuüben hat und der Querschnitt dieses Ankers 30 cm² beträgt. In Anbetracht

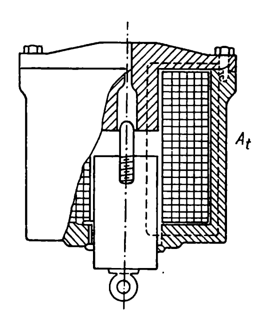


Abb. 132

des intermittierenden Betriebes kann die zulässige Stromdichte 3 A/mm² betragen. Der Füllfaktor der Spule ist 0,5. Wegen der Streuung der Luftspalte, der Stoßstellen und des Anteiles der auf das Eisen entfallenden magnetischen Spannung wird die für den Luftspalt erforderliche Durchflutung um 18% erhöht.

Lösung: $F = 101\ \mathrm{cm}^2$.

Aufgabe 23

Es soll der Streuungskoeffizient des Magneten von Aufgabe 22 bestimmt werden. Gleichzeitig soll damit die Größe der notwendigen Durchflutung kontrolliert werden. Das Verhältnis Länge zu Breite des Spulenquerschnittes sei 2 : 1. Der Einfluß des Ansatzes des Ankers wird vernachlässigt. Das Bild des Streuflusses wird durch einfache geometrische Gebilde gelöst. Die weiteren Daten werden in sinngemäßer Anwendung des Beispiels 19 gewählt, und die Berechnung wird ähnlich wie dort durchgeführt.

Aufgabe 24

Es soll der elektrische Ersatzkreis des Magneten von Aufgabe 23 gezeichnet werden.

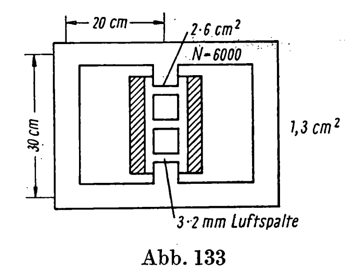


Abb. 133

Aufgabe 25

1. Wie groß darf der Maximalfluß im mittleren Schenkel einer Anordnung nach Abb. 133 sein, wenn die auf das Eisen entfallende magnetische Spannung weniger als 6% der auf alle Luftstrecken entfallenden magnetischen Spannung ist?
2. Wie groß ist die zu diesem Maximalwert gehörende mittlere Induktivität der Spule? Die Streuung soll vernachlässigt werden, der Eisenkern soll aus Transformatorenblech bestehen.

Lösung:

1. $\Phi \approx 154000$ M;
2. 18,4 H.

Aufgabe 26

Wie groß ist die Induktion im Luftspalt des in Abb. 134 angegebenen Zugmagneten in der Anfangs- und Endstellung, wenn der Anker in Abständen von 0,2 cm und 1 cm von einem Anschlag aufgehalten wird?

Lösung:

1. $B \approx 8000$ G;
2. $B \approx 1840$ G.

Aufgabe 27

Welche Größe muß die bei dem in Abb. 135 dargestellten Eisenkern notwendige Durchflutung haben, wenn im Luftspalt eine Induktion von 24000 G vorhanden sein soll? Die Streuung wird vernachlässigt. Die Magnetisierungskurve des Materials des Eisenkernes gleicht der des Dynamobleches in Abb. 12.

Lösung: $\Theta \approx 1250\,\text{A}$.

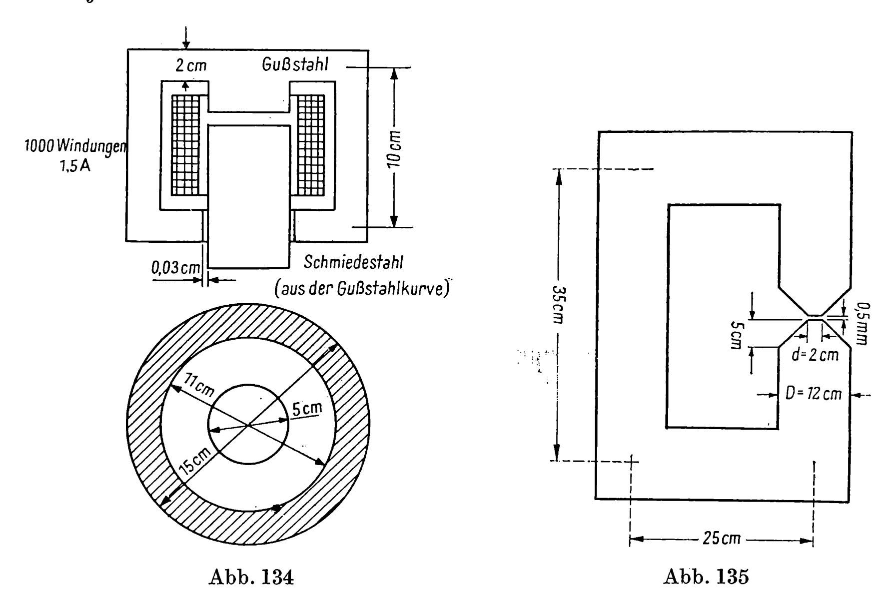


Abb. 134 Abb. 135

Aufgabe 28

1. Entsprechend Abb. 136 wirken in der Gleichgewichtslage des Relais auf die beiden Arme Zugkräfte von je 11,53 kg. Wie groß ist der Querschnitt des mittleren Schenkels und die im Gleichgewichtszustand erforderliche Durchflutung? Der Eisenkern soll aus Dynamoblech bestehen und die Streuung vernachlässigt werden.
2. Spricht das Relais bei kleiner oder größer werdendem Strom an?

Lösung:

1. $F = 0{,}318\,\text{cm}^2$, $\Theta = 967\,\text{A}$;
2. Bei ansteigendem Strom.

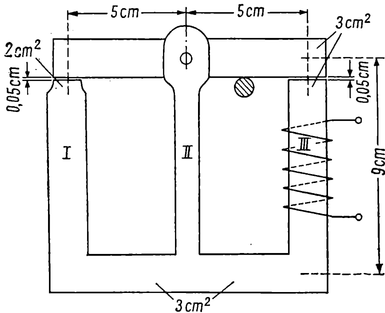


Abb. 136

Aufgabe 29

Die Windungszahl der beiden Spulen der Wirbelstrombremse in Abb. 137 beträgt 800 und der darin fließende Strom 2 A. Die Spulen magnetisieren in gleicher Richtung. Die entmagnetisierende Wirkung der Wirbelströme soll mit 1800 A berücksichtigt werden. Wie groß ist die Induktion im Luftspalt?

Lösung: $B \approx 2600\,\mathrm{G}$.

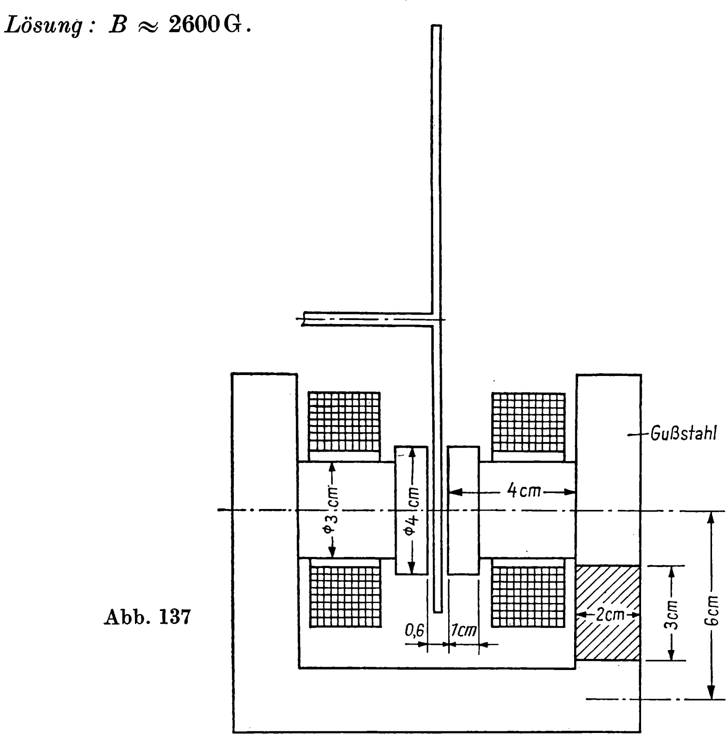


Abb. 137

Aufgabe 30

Man zeichne die Änderung des Magnetisierungsstromes eines Einphasentransformators, dessen Eisenkern eine Maximal-Induktion von 14000 G hat. Die Primärspannung des Transformators und damit die zeitliche Änderung der Induktion soll einen sinusförmigen Verlauf haben. Die zeitliche Änderung des Stromes soll angenähert aus der Magnetisierungskurve konstruiert werden. Der Höchstwert der 3. Harmonischen soll bestimmt werden. Weiterhin soll die Stromkurve aus einer beliebig gezeichneten Hysteresiskurve konstruiert werden. Die Größe der 5. Harmonischen soll bestimmt werden. Ebenso soll die zeitliche Änderung der Induktion für den Fall konstruiert werden, daß im Transformator ein sinusförmiger Strom vom vorigen Höchstwert aufgezwungen wird. Welche Harmonischen treten dabei in der Induktionskurve auf?

Aufgabe 31

Die Güte eines permanenten Magneten ist um so größer, je größer der Fluß ist, den er in einem gegebenen Luftspalt aufrechterhalten kann. Dieser bestimmt die auf den Luftspalt entfallende magnetische Spannung und bei

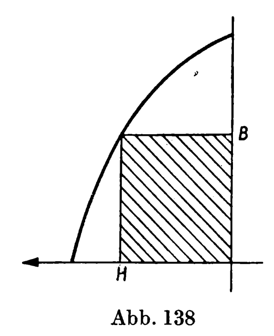


Abb. 138

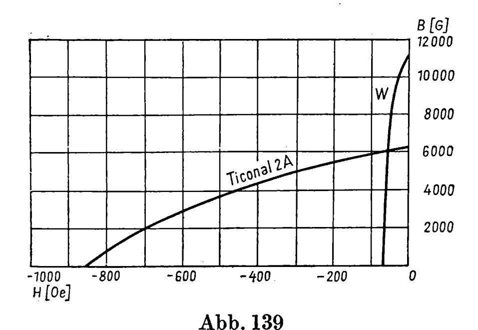


Abb. 139

gegebenem Luftspalt die Feldstärke. Der Fluß wird dieser Feldstärke durch den abfallenden Ast der Hysteresiskurve des Magneteisens zugeordnet. Die gestrichelte Fläche in Abb. 138 ist das Produkt aus beiden und bestimmt die Güte des Magneten. Die Güte des Magneten hängt also von der Form der Magnetisierungskurve des angewandten Materials und von der Konstruktion des Magneten ab. Die beste Konstruktion ist die, bei der der Arbeitspunkt des Magneten in dem Punkt liegt, bei dem das Produkt $B \cdot H$ ein Maximum hat. Abb. 139 zeigt die Kennlinien von Wolframstahl und des Magnetwerkstoffes Ticonal von größerer Koerzitivkraft. Aus der Abbildung geht hervor, daß sich die günstigsten Längen- und Querschnittsverhältnisse bei einem Magneten aus Ticonal und einem Magneten aus Wolframstahl unterscheiden. Bei rich-

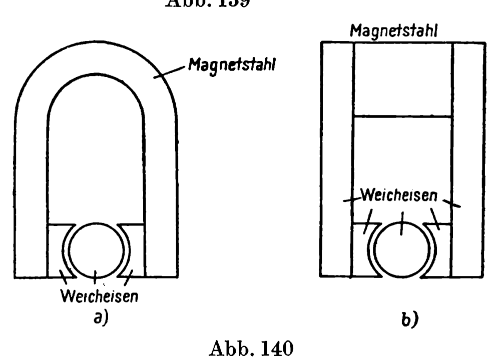


Abb. 140

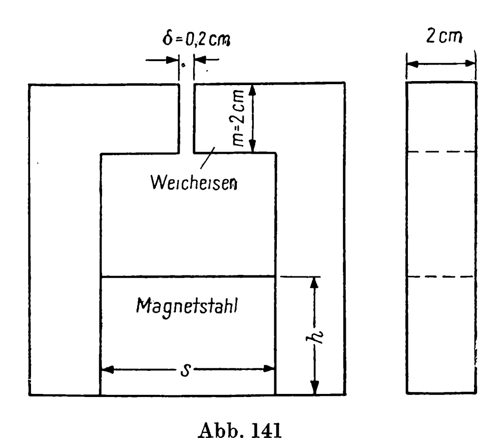


Abb. 141

tiger Konstruktion ist weniger Ticonal als Wolframstahl erforderlich. Als anschauliche Beispiele sind in Abb. 140 die Konstruktionen eines alten und eines modernen Drehspulinstrumentes gegenübergestellt.

In Abb. 141 ist eine moderne Magnetkonstruktion aus Ticonal gezeigt. Der abfallende Ast der Magnetisierungskurve ist in Abb. 139 eingezeichnet. Die Induktion im Luftspalt soll 3000 G betragen.

1. Wie groß ist das Verhältnis $\frac{s}{h}$ des Magnetstahls (bei einer Tiefe von 2 cm), bis zu welchem das Produkt $B \cdot H$ bei Verwendung von Ticonal größer ist als bei Verwendung von Wolframstahl? Die auf die Weicheisenteile entfallende magnetische Spannung und die Streuung sollen vernachlässigt werden.

2. Bei welchem Verhältnis $\frac{s}{h}$ wird optimale Ausnutzung des Ticonalstahls erreicht?

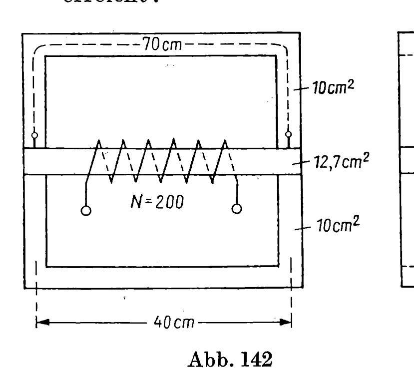


Abb. 142

Lösung:

1. $\frac{s}{h} = 11{,}1$;

2. $\frac{s}{h} = 0{,}74$.

Aufgabe 32

Das Doppeljoch aus Gußeisen nach Abb. 142 schließt einen Eisenstab ein, für dessen Material die Hysteresiskurve von Dynamoblech (Abb. 56) gilt. Die Hysteresisschleifen des Gußeisens sind in Abb. 57 gezeichnet. Durch die Erregerspule mit 200 Windungen wird ein Gleichstrom von 2,13 A geleitet und dann der Strom unterbrochen. Wie groß muß die Kraft sein, um das obere Halbjoch, wenn von dessen Eigengewicht abgesehen wird, abzureißen, wenn

1. die Eisenfläche einen Luftspalt von 0,2 mm,
2. keinen Luftspalt

hat? Die erste Magnetisierungskurve verläuft erfahrungsgemäß durch die Spitze der Hysteresisschleifen. Es wird angenommen, daß sich die Induktion an den Berührungsflächen gleichmäßig verteilt. Die Streuung wird vernachlässigt.

Lösung:

1. $P \approx 3{,}1\,\mathrm{kg}$;

2. $P \approx 13\,\mathrm{kg}$.

Aufgabe 33

Eine Drosselspule, wie in Abb. 143 dargestellt, dient u. a. zur stufenweisen Verdunklung in Theatern. Der Eisenkern wird mit einer gleichstromgespeisten, auf dem mittleren Schenkel befindlichen Spule vormagnetisiert. Die überlagerte Wechselstromdurchflutung durch die Spulen auf den Seitenschenkeln wird Extremwerte um den Mittelwert zustande bringen. Die Änderungen der Induktion und der Feldstärke beschreiben eine kleine Elementar-Hysteresis-Schleife, die von der Spitze der der Durchflutung $H_g + H_w$ entsprechenden normalen Hysteresis-Schleife bis zum Wert $H_g - H_w$ abnimmt

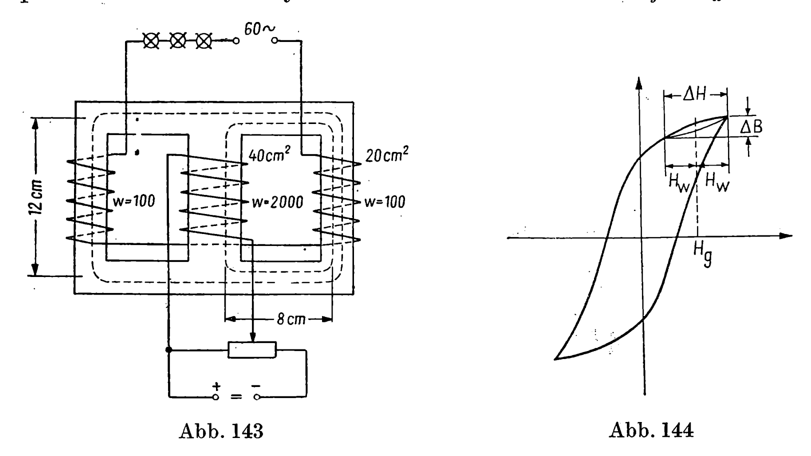


Abb. 143 Abb. 144

und sich dann schließt (Abb. 144). Die mittlere Induktivität der Spule wird von der Neigung der kleinen Schleifen der sogenannten incrementalen (reversiblen) Permeabilität, also von dem Verhältnis

$$\mu_i = \frac{\Delta B}{\Delta H},$$

bestimmt. Dieses Verhältnis nimmt mit abnehmender Gleichstromdurchflutung zu, da dann die Hysteresisschleifen steiler verlaufen. Es soll die reversible Permeabilität und die auf die Drosselspule bzw. auf die Lampen entfallende Spannung bestimmt werden, wenn der Effektivwert des Wechselstromes 4 A und die Gleichstromdurchflutung 0,6 A betragen. Der Eisenkern besteht aus Transformatorenblech, und der Widerstand der Spule kann vernachlässigt werden. Es soll angenähert angenommen werden, daß die kleinen Hysteresisschleifen entlang der 1. Magnetisierungskurve liegen. Diese Näherung ist bei großen Gleichstromdurchflutungen zulässig. Die angelegte Wechselspannung beträgt 110 V. Mit wiederholten Versuchen wird der ungefähre Spannungswert der Lampen bei kleineren Gleichstrommagnetisierungen bestimmt. Außerdem soll noch die Änderung der auf die Lampen entfallenden Spannung als Funktion des Gleichstromes aufgezeichnet werden.

Lösung:

$\mu_i \approx 73;$
$U_{Dr} \approx 12{,}6\,V;$
$U_L \approx 109\,V.$

Aufgabe 34

Bei der Aufnahme der Magnetisierungskurve kleinerer Probestücke aus Eisen kann zur Messung der Feldstärke der in Abb. 145a dargestellte halbkreisförmige magnetische Spannungsmesser verwendet werden. Die gestrichelte Bahn schließt keine Durchflutung ein, so daß der magnetische Spannungsabfall des Probestückes zwischen beiden Enden der kleinen Spannungsmeßspule $U_{m(a-b)}$ gleich ist der Spannung der Spule:

$$U_{m(a-b)} = \int H\,ds.$$

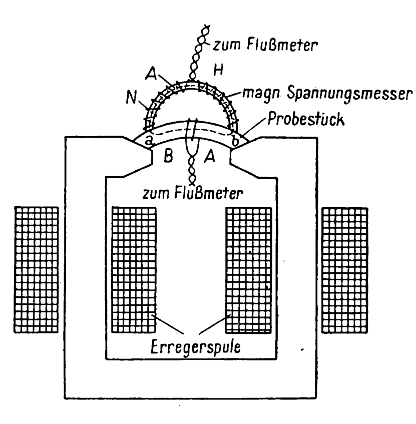


Abb. 145a

Dabei bedeutet H die Komponente der Feldstärke in Richtung der Bahn auf den Abschnitt ds der Spule. Ist F der konstante Querschnitt der Meßspule und w die gleichmäßig verteilte Windungszahl pro Zentimeter, so wird

$$\mu_0 w F\, U_{m(a-b)} = \int (\mu_0 H F)\, w \cdot ds.$$

Auf der rechten Seite steht die gesamte Flußverkettung der Spule. Die Flußänderung erzeugt in der Spule eine bestimmte Spannung. Das Zeitintegral der induzierten Spannung, also der Spannungsstoß, kann mit einem ballistischen Galvanometer oder einem Flußmeter gemessen werden. Der Spannungsstoß ist gleich der Flußänderung. Die Flußänderung ist proportional der Änderung der magnetischen Spannung

$$\int u\,dt = \Delta\psi = \mu_0 w F\,\Delta U_{m(a-b)}.$$

Man kann also die Änderung von $U_{m(a-b)}$ messen und daraus die Änderung der mittleren Feldstärke des Eisens berechnen. Dabei kann man die Feldstärke zwischen den beiden Enden der Spulen mit guter Annäherung als konstant ansehen.

Aus dem Spannungsstoß kann man ebenfalls den Fluß und hieraus die Induktion des Probestückes mit Hilfe der hierauf aufgewickelten Spule von bekannter Windungszahl bestimmen. Durch Messung von zusammengehörenden Werten B und H kann die Magnetisierungskurve oder die Hysteresisschleife aufgezeichnet werden.

Mit der in Abb. 145a gezeigten Einrichtung werden die Sektoren eines Motorrad-Zündmagneten geprüft.

Die Meßspule kann in einem homogenen Feld von bekannter Stärke, z. B. im langen, geraden Solenoid, in dem ein bekannter Strom fließt, geeicht werden (Abb. 145b). Der Durchmesser des Solenoids beträgt etwa 5 cm, auf der gesamten Spulenlänge von 92,5 cm befinden sich, gleichmäßig nebeneinander aufgewickelt, 389 Windungen. Bei der Kommutierung des 10 A starken Stromes in der Spule des Solenoides betragen die Ausschläge des mit der Meßspule verbundenen Flußmeters

α^0_{links}: 40,5 40,8 40,7 40,2,

α^0_{rechts}: 40,3 40,0 41,7 40,7.

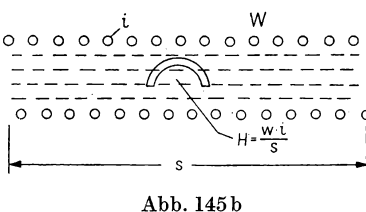


Abb. 145b

Der Querschnitt des zu messenden Sektors des Zündmagneten beträgt $F_z = 2{,}4\ \text{cm}^2$. Unter der Meßspule für die Feldstärke sind auf die Mitte des Magnetsektors zur Induktionsmessung 4 Windungen gewikkelt. Die Empfindlichkeit des verwendeten Flußmeters beträgt 15000 M · Windung/Grad. Die abfallende Kurve der Hysteresisschleife, die für das Verhalten permanenter Magnete maßgebend ist, wird aufgenommen, indem von einem bestimmten, bereits Sättigung hervorrufenden konstanten Wert der Durchflutung auf kleinere positive und dann kleinere negative Werte der Durchflutung übergegangen wird. Dabei werden die Ausschläge des zuerst an die Meßspule für die Feldstärke und dann an die Meßspule für die Induktion angeschlossenen Flußmeters abgelesen. Die Spitze der Hysteresisschleife wird bestimmt, indem bei dem ersten Punkt der Strom sowohl bei der Messung von H als auch bei der Messung von B unterbrochen wird. Dann werden die Meßspulen vom Probestück entfernt bzw. abgezogen. In der Tabelle 11 sind die Stromwerte der Erregerspulen sowie die rechts- und linksseitigen Ausschläge des Flußmeters bei der Messung von Feldstärke und Induktion zusammengefaßt.

Tabelle 11

I_1/A	I_2/A	H		B	
		α^0_{links}	α^0_{rechts}	α^0_{links}	α^0_{rechts}
18,5	0*	7 × 199	7 × 200,5	5 × 199,5	5 × 200
18,5	2	4 × 284	4 × 287	455,5	450
18,5	0	4 × 347	4 × 350	2 × 316	2 × 319
18,5	−0,5	4 × 363	4 × 366	2 × 353	2 × 357
18,5	−1	4 × 378	4 × 482	2 × 403,5	2 × 410
18,5	−1,3	4 × 387	4 × 391,5	5 × 178	5 × 180
18,5	−1,5	4 × 396	4 × 401	5 × 193	5 × 196
18,5	−1,8	4 × 403,5	4 × 408,5	5 × 215,5	5 × 219,5

Aus den Meßergebnissen sollen die abfallende Kurve der Hysteresisschleife gezeichnet und die Werte des remanenten Magnetismus und der Koerzitivkraft bestimmt werden.

Lösung:

$B_r = 5700$ G;

$H_k = 530$ Oe.

Aufgabe 35

Es soll die Eichung der Meßspule für die Feldstärke aus der Aufgabe 34 im magnetischen Feld eines einzelnen langen, geraden Leiters besprochen werden. Der lange, gerade Leiter wird in den Mittelpunkt der halbkreisförmigen Mittellinie der Spule gelegt.

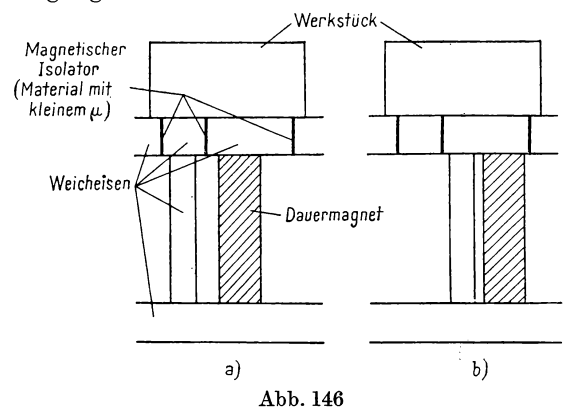


Abb. 146

Wie groß muß der im Leiter fließende Strom sein, damit dieselben Ausschläge erhalten werden, wie bei der Eichung in Aufgabe 34. Beide Verfahren sollen miteinander verglichen werden. Der mittlere Durchmesser der Meßspule beträgt 3 cm.

Lösung: $i = 252$ A.

Aufgabe 36

Das in Abb. 146 dargestellte Aufspannfutter mit permanentem Magneten hält im Fall a das Werkstück aus Eisen fest. Im Falle b ist das Werkstück leicht zu entfernen. Die Wirkungsweise der Anordnung soll erklärt werden.

Aufgabe 37

Mit dem in Abb. 147 skizzierten Transformator ist es möglich, sinusförmige Spannungen in schmale Spannungsimpulse umzuformen. Der rechte Schenkel des Transformatorenkerns ist aus einem Spezialeisen, z. B. Hipernik, her-

gestellt, das plötzlich, bei etwa 15000 G, gesättigt ist. Der Betrieb des Transformators soll erklärt und qualitativ richtig die Kurven der Primär- und der Sekundärspannung sowie des Magnetisierungsstromes aufgezeichnet werden.

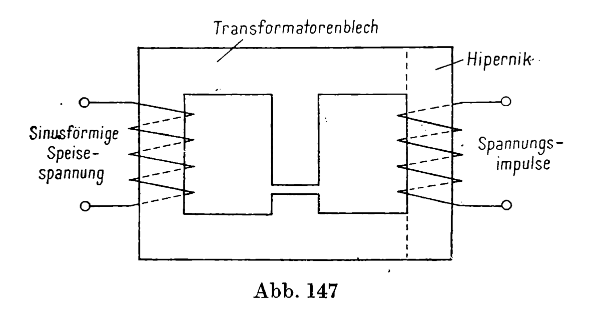


Abb. 147

Aufgabe 38

Welche von den beiden in Abb. 148 dargestellten ähnlichen Konstruktionen von Lautsprechermagneten hat die größere Streuung? Warum?

Lösung: Konstruktion b).

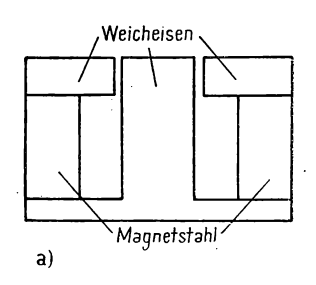
Aufgabe 39

Welche der in Abb. 149 dargestellten drei Anordnungen hat das kleinste magnetische Streufeld? Welche der drei Anordnungen ist dementsprechend am wenigsten gegen fremde Felder empfindlich?

Lösung: Konstruktion c).

Aufgabe 40

Die industrielle Anwendung mechanischer Gleichrichter wurde lange Zeit wegen der Zerstörung der Kontakte durch die Schaltfunken gehemmt. Während der Kommutation ist Stromlosigkeit erwünscht, dagegen durchläuft die Sinuskurve bei der Stromwendung ihren steilsten Abschnitt. Es gibt also keine stromlose Zeitspanne.



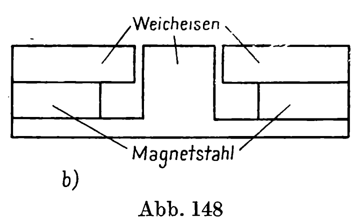
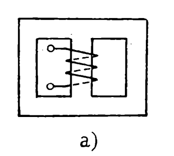
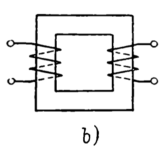


Abb. 148





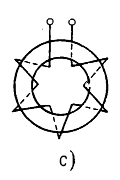


Abb. 149

Ein Gegenmittel ist die Anwendung einer Schaltdrossel mit einem Eisenkern mit stark geknickter Magnetisierungskurve. Diese wird mit dem Stromleiter in Reihe geschaltet (BBC-Mitteilungen 1950, S. 478). Durch die Drossel kann erreicht werden, daß zur Zeit der Kommutierung der Strom den Wert 0 bzw. einen sehr kleinen Wert erreicht. Es soll entsprechend der in Abb. 150 dargestellten Hysteresisschleife der Verlauf der Stromkurve erklärt werden.

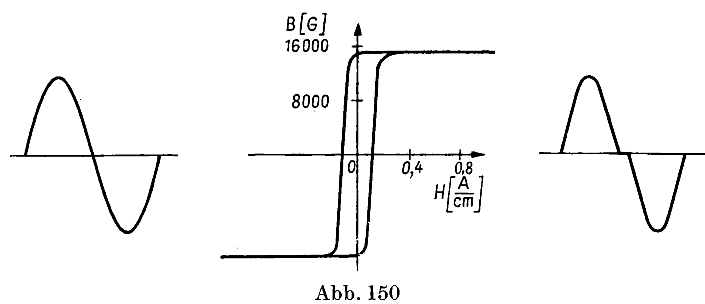


Abb. 150

Aufgabe 41

Abb. 151 zeigt einen Transformator für Neonröhren. Eine solche Anordnung wird im allgemeinen dort verwendet, wo die Belastungscharakteristik $\frac{U}{I}$ negativ ist. Die Stromstärke muß demzufolge begrenzt werden. Bei Leuchtstoffröhren ist es meist erwünscht, daß der Kurzschlußstrom das 1,25fache des

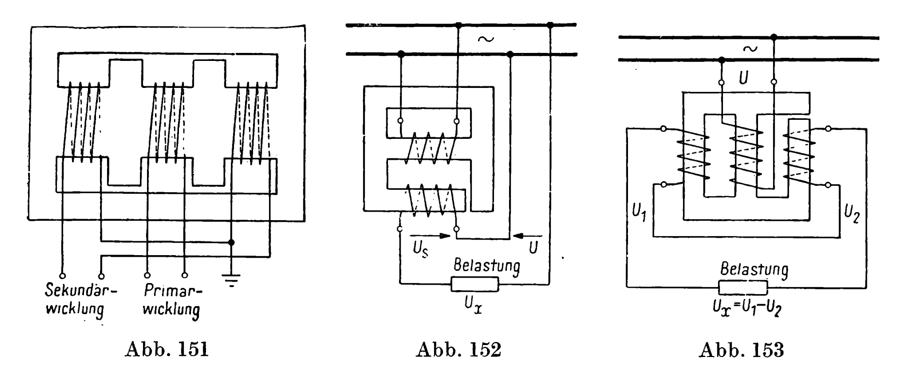


Abb. 151 Abb. 152 Abb. 153

Nennstromes nicht überschreitet. Es soll die Rolle der durch einen Luftspalt unterbrochenen magnetischen Nebenschlüsse in der Funktion des Transformators erklärt werden.

Aufgabe 42

In den Abb. 152 und 153 sind die Anordnungen der Eisenkerne und der Spulen zweier selbsttätiger Spannungsregler dargestellt. Es soll durch Summierung

der Teilspannungen nachgewiesen werden, daß die Klemmenspannung U_k der Belastung unabhängig von der Änderung der Speiserspannung U über einen gewissen Wert von U annähernd konstant gehalten werden kann (ATM J 062–7 Nov. 1934).

Aufgabe 43

Der in Abb. 154 skizzierte Geberdynamo dient zur Fernanzeige der Umdrehungszahl. Es soll durch Addition der Flüsse der einzelnen Zweige bewiesen werden, daß der Fluß des Ankers bei entsprechenden Verhältnissen unabhängig von der Schwankung der Erregerspannung U_e konstant bleibt.

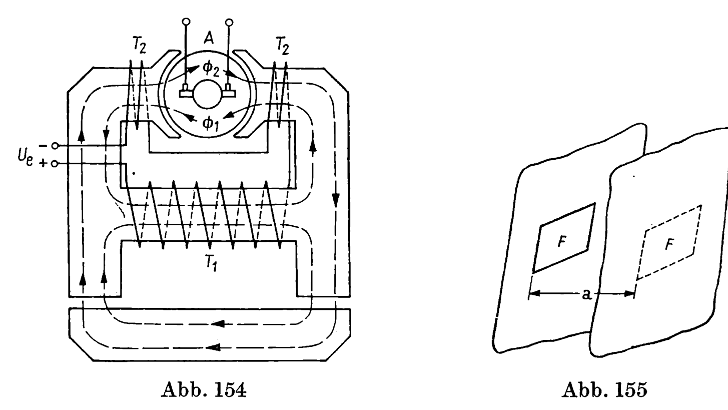


Abb. 154 Abb. 155

Aufgabe 44

Die in Aufgabe 33 angegebene Schaltung zeigt das Prinzip eines sogenannten magnetischen Verstärkers. An den Klemmen des in diesem Kreis eingeschalteten Widerstandes steht eine Gleichspannung, wegen der Gleichrichtung des Stromes auf der Wechselstromseite, zur Verfügung. Bei einer kleinen Änderung des Gleichstromes des mittleren Schenkels kann eine große Spannungsänderung am Widerstand erreicht werden. Unter Berücksichtigung der Überlegungen zur Aufgabe 33 sollen das Prinzip und die Bedingungen der Verstärkung erklärt werden (ETZ 1950, S. 7).

Aufgabe 45

Wie groß ist die magnetische Leitfähigkeit des Feldabschnittes in Luft zwischen den Flächen F zweier in einer Entfernung a parallel angeordneter Platten von unendlicher Ausdehnung (Abb. 155)? Es soll dabei angenommen werden, daß die Kraftlinien senkrecht zu den Ebenen verlaufen.

Lösung:

$$\Lambda = \frac{\mu_0 F}{a}.$$

Aufgabe 46

Es soll die magnetische Leitfähigkeit des Luftraumes zwischen zwei parallelen Zylindern mit unendlicher Permeabilität und der Länge s angegeben werden. Der Radius beider Zylinder sei r, die Entfernung ihrer Mittelpunkte d $(d > 2r)$.

Lösung:

$$\Lambda = \frac{2\pi\mu_0 s}{\ln\left(\frac{d}{2r} + \sqrt{\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - 1}\right)}.$$

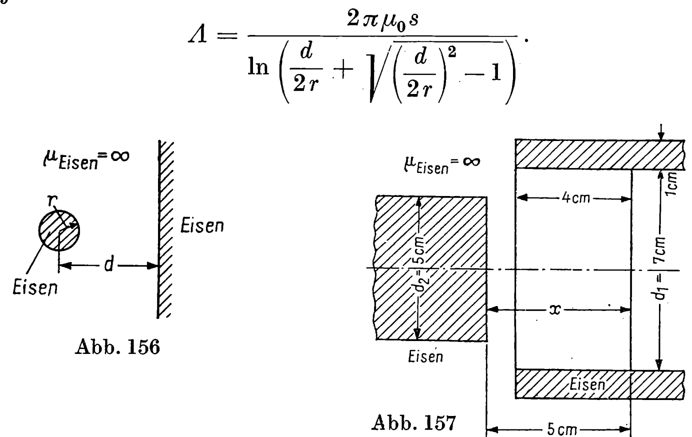


Abb. 156

Abb. 157

Aufgabe 47

Es soll die magnetische Leitfähigkeit eines mit Luft erfüllten Feldabschnittes zwischen 2 konzentrischen Eisenzylindern mit unendlicher Permeabilität angegeben werden. Die Zylinderhalbmesser sind r_1 und r_2, ihre Länge ist s.

Lösung:

$$\Lambda = \frac{4\pi\mu_0 s}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Aufgabe 48

Es soll die magnetische Leitfähigkeit des in Abb. 156 dargestellten Feldabschnittes für die Tiefe 1 angegeben werden, wenn die senkrechte Abmessung unendlich groß und $d \gg r$ ist.

Lösung:

$$\Lambda = \frac{2\pi\mu_0 s}{\ln\frac{2d}{r}}.$$

Aufgabe 49

Es soll die Änderung der Leitfähigkeit des Feldabschnittes zwischen den beiden Eisenzylindern in Abb. 157 als Funktion von x für $x = 5$ cm bis $x = 0$ aufgezeichnet werden.

Aufgabe 50

Es sollen die magnetischen Leitwerte (Beispiel 17) der in Abb. 158 aufgezeichneten Nutenanordnungen unter der Annahme berechnet werden, daß die Kraftlinien überall waagerecht verlaufen und die Streulinien über der Nutenmündung vernachlässigt werden können. Im Falle c) ist die Stromdichte über dem Querschnitt gleich.

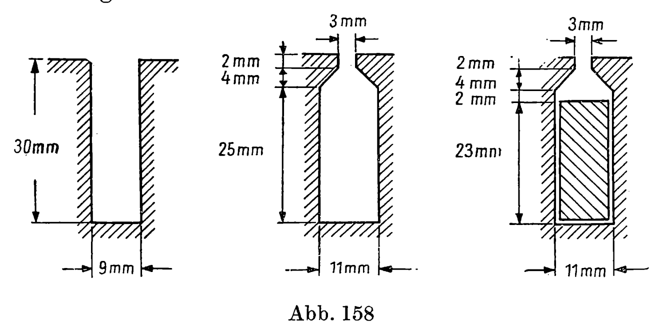


Abb. 158

Lösung:

a) $\Lambda = 3{,}33 \cdot \mu_0 s$;
b) $\Lambda = 3{,}51 \cdot \mu_0 s$;
c) $\Lambda = 2{,}12 \cdot \mu_0 s$.

Aufgabe 51

Wie groß ist die magnetische Leitfähigkeit des Feldabschnittes zwischen den Eisenflächen *a–a* und *b–b* nach Abb. 159, wenn die Abmessung der Eisenflächen senkrecht zur Zeichenebene 1 cm beträgt. Die Kraftlinien verlaufen in diesem Falle halbkreisförmig.

Lösung:

$\Lambda = 0{,}78 \cdot 10^{-8}$ H/cm.

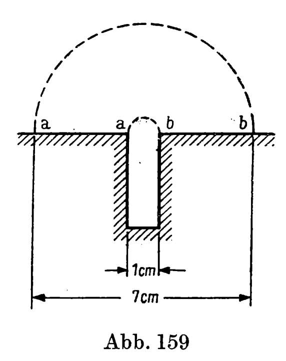


Abb. 159

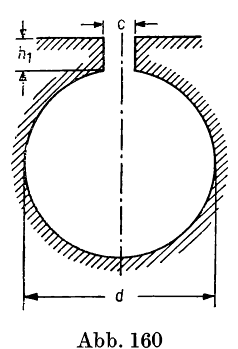


Abb. 160

Aufgabe 52

Es soll die magnetische Leitfähigkeit der in Abb. 160 skizzierten kreisförmigen Nut für eine 1 cm tiefe Strecke berechnet werden. In der Nut ist kein Leiter vorhanden. Für die Berechnung ist anzunehmen, daß die Kraftlinien in der Nut horizontale Geraden sind, die zur Mittellinie senkrecht verlaufen.

Lösung:

$$\Lambda = 1{,}57\,\mu_0 + \frac{h_1}{c}\,\mu_0 .$$

Aufgabe 53

Es soll die Leitfähigkeit der Nut aus Aufgabe 52 bestimmt werden, wenn die Nut von einem kreisförmigen stromdurchflossenen Leiter ausgefüllt ist. Die Stromdichte ist dabei im Querschnitt überall dieselbe.

Lösung:

$$\Lambda \approx 0{,}623\,\mu_0 + \frac{h_1}{c}\,\mu_0 .$$

Aufgabe 54

Auf den beiden Schenkeln des in Abb. 161 dargestellten hufeisenförmigen Eisenkernes befindet sich eine gleichmäßig verteilte Wicklung. Die Windungszahl beträgt je Zentimeter 10, und in jeder Spule fließt ein Strom von 3 A. Die

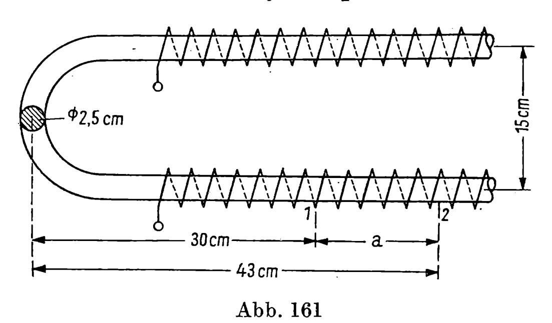


Abb. 161

Durchflutungen der beiden Halbspulen sind so gerichtet, daß sich die Windungen längs des Eisenkerns addieren. Es werden also im Eisenkern gleichgerichtete Flüsse erzeugt.

Es soll der Streufluß der Strecke a bei sehr großer Permeabilität des Eisens berechnet werden. Durch die große Permeabilität kann die längs des Eisens auftretende magnetische Spannungsänderung vernachlässigt werden. Die Abmessungen des Eisenkerns links und rechts vom betrachteten Abschnitt sind so groß, daß sowohl der Einfluß der Polflächen als auch der der linksseitigen halbkreisförmigen Strecke unberücksichtigt bleiben kann.

Lösung:

$\Phi = 4550$ M.

Aufgabe 55

Welche Größe hat die magnetische Spannung längs der Strecke a des in Aufgabe 54 näher gekennzeichneten Eisenkerns, wenn an der Stelle 1 ein Fluß von $\Phi_1 = 54000$ M eintritt und bei der Berechnung der Streuung angenommen wird, daß die Permeabilität von 1 bis 2 konstant bleibt. Der Eisenkern besteht aus Gußeisen.

Lösung :



≈ 126 A.

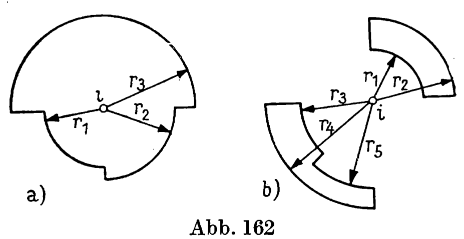


Abb. 162

Aufgabe 56

Im Abstand r senkrecht zur Achse eines geraden Leiters mit dem Strom i beträgt die Feldstärke $H = \frac{i}{2\pi r}$. Es soll bewiesen werden, daß die magnetische Spannung entlang den in Abb. 162 dargestellten Wegen im Falle a gleich i und im Falle b gleich 0 ist.

Aufgabe 57

Es soll die unter dem Einfluß der in Abb. 163 gezeichneten geraden Leiter auftretende Feldstärke im Punkt A berechnet werden, wenn in dem bzw. in den Leitern ein Strom von 100 A fließt.

Lösung :

a) $H = 0{,}479$ A/cm;
b) $H = 0{,}285$ A/cm;
c) $H = 0{,}063$ A/cm;
d) $H = 0{,}019$ A/cm;
e) $H = 1{,}105$ A/cm.

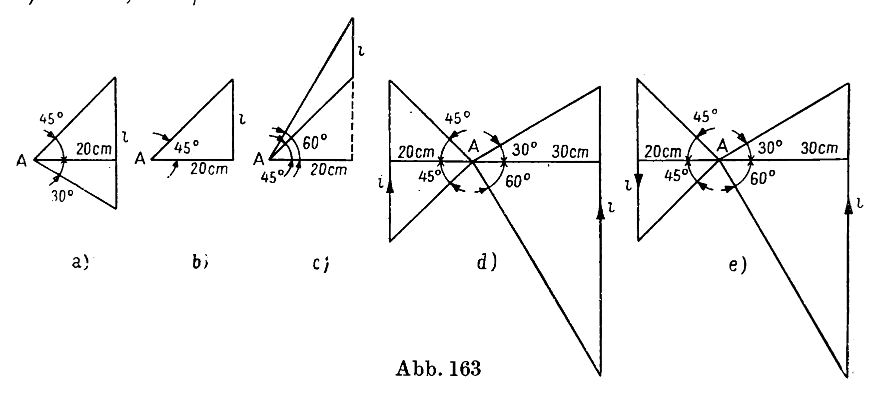


Abb. 163

Aufgabe 58

Wie weit voneinander entfernt liegen die beiden Drähte einer Doppelleitung, wenn die Induktion auf der Hälfte der die beiden Leiter verbindenden senkrechten Geraden 0,96 G und der Strom der Leiter 120 A betragen?

Lösung: 1 m.

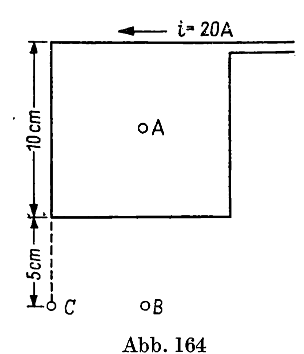


Abb. 164

Aufgabe 59

Wie groß ist die Feldstärke einer Anordnung nach Abb. 164 in den Punkten A, B, C?

Lösung:

in Punkt A: $H = 1{,}84$ A/cm;
in Punkt B: $H = 0{,}383$ A/cm;
in Punkt C: $H = 0{,}165$ A/cm.

Aufgabe 60

Es soll die Induktion in einem Punkt, der auf dem Radius eines kreisförmig verlaufenden Leiters mit dem Halbmesser R und dem Strom i im Abstand a vom Mittelpunkt liegt, angegeben werden. Weiterhin soll angegeben werden, wie sich die Induktion längs des Halbmessers verteilt. Ist $R = i = 1$, so ist die Induktionsverteilung gegeben durch $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4}{1 - a^2} E$.

Darin ist E ein elliptisches Integral, das in mathematischen Tabellenbüchern berechnet ist (JAHNKE-EMDE, Tafeln höherer Funktionen, 5. Aufl., Leipzig 1951).

Aufgabe 61

In der zur Achse eines langen geraden Leiters mit kleinem Querschnitt parallelen Ebene liegt in einer Entfernung von 6 bis 12 cm vom Mittelpunkt des Leiters eine Rechteckschleife mit den Abmessungen 2 cm in Leiterrichtung und 6 cm hierzu senkrecht.

1. Welche Größe hat der Fluß, der durch diese Schleife hindurchtritt?
2. Welche Größe hat der durchtretende Fluß, wenn die Ebene um 60° um ihre dem Leiter näherliegende, mit dem Leiter parallele Kante verdreht wird? Im Leiter fließt ein Strom von 50 A.

Lösung:

1. $\Phi = 13{,}8$ M;
2. $\Phi = 13$ M.

Aufgabe 62

Eine zylindrische Luftspule hat dicht nebeneinanderliegend 8 Windungen/cm. In der Spule fließt ein Strom von 3 A.

Wie groß ist die Feldstärke, berechnet nach der Näherungsformel, im Mittelpunkt und an den Endpunkten der Spulenachse, wenn die Spule

1. 10 cm,
2. 100 cm
   lang ist?
3. Welcher Strom muß in der Spule von 100 cm Länge fließen, wenn in der Spulenachse eine Induktion von 20 G auftreten soll?

Lösung:

1., 2. $H_a = 24\,\text{A/cm}$, $H_e = 12\,\text{A/cm}$;
3. $i = 2\,\text{A}$.

Aufgabe 63

Wie groß ist der durch die Näherungsformel entstandene Fehler der Teilaufgaben 1 und 2 in Aufgabe 62, wenn der Durchmesser der Spule 6 cm beträgt?

Lösung:

1. Fehler für H_a : 16,5%, für H_e : 4,35%;
2. $H_a \approx 0$,
   $H_e \approx 0$.

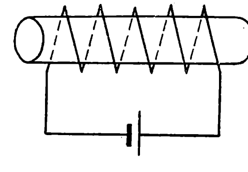


Abb. 165

Aufgabe 64

Auf einem Holzzylinder sind, wie in Abb. 165 dargestellt, dicht nebeneinanderliegende Windungen aufgewickelt.

Wie stellt sich ein Kompaß im Punkte A ein?

Lösung:

Die Spule kann in zwei Komponenten zerlegt werden:

1. in zur Achse genau senkrechte kreisförmige Leiter. Ihre Wirkung im Punkt A ist 0.
2. in eine axiale Komponente. Ihre Wirkung hat zur Folge, daß sich die Nadel senkrecht zur Spulenachse einstellt.

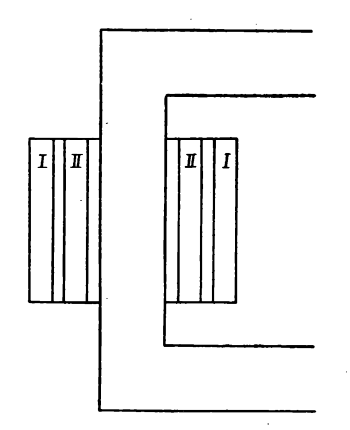
Aufgabe 65

Elektromagnetische Meßgeräte können durch magnetische Fremdfelder beeinflußt werden, wodurch ein Anzeigefehler entsteht. Der Fehler ist am größten, wenn die Richtung des Fremdfeldes mit der des Feldes des Meßsystems

übereinstimmt. Bei der Anwendung von Wechselstrom müssen auch Frequenz- und Phasenlage übereinstimmen. Der Anzeigefehler infolge äußerer Magnetfelder muß nach den Vorschriften in einem Fremdfeld von 5 G geprüft werden. Ein solches Feld kann schon von einer kreisförmigen Drahtschleife mit einem Durchmesser von 100 cm erzeugt werden. Wie groß ist die notwendige Ampere-Windungszahl, damit im Mittelpunkt der Schleife ein Feld von $B = 5$ G erzeugt wird?

Lösung:

400 Aw, d.h., in der Schleife muß ein Strom von 400 A fließen, da die Windungszahl 1 ist.



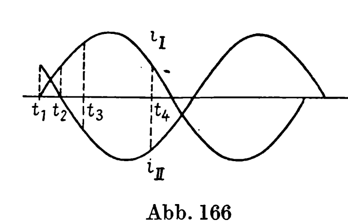


Abb. 166

Aufgabe 66

Es soll näherungsweise das Bild des Magnetfeldes gezeichnet werden, wenn

1. zur Zeit t_1 nur die Primärspule I in der Anordnung nach Abb. 166 erregt wird,
2. wenn zur Zeit t_2 nur die Sekundärspule erregt wird,
3. wenn zur Zeit t_3 in beiden Spulen ein Strom fließt und der Augenblickswert des Sekundärstromes größer ist als der des Primärstromes und beide Ströme entgegengesetzte Richtung haben,
4. wenn zur Zeit t_4 der Augenblickswert des Primärstromes größer ist als der des Sekundärstromes und die beiden Ströme in entgegengesetzter Richtung fließen.

Die Wicklung des Transformators ist als Röhrenwicklung ausgeführt, wobei Primär- und Sekundärwicklung konzentrische Zylinder bilden. Primäre und sekundäre Windungszahl sind gleich. Die sich ergebenden Flußbilder zeigen die Änderung der Flußverteilung während einer Halbperiode an. In der Abbildung ist nur ein Schenkel des Transformators gezeichnet.

Aufgabe 67

In der Nähe einer ebenen Eisenfläche befindet sich in Luft parallel zur Eisenfläche ein unendlich langer gerade Leiter mit kleinem Querschnitt. Es soll das Bild des Magnetfeldes des in diesem Leiter fließenden Stromes unter folgenden Voraussetzungen gezeichnet werden:

1. die Permeabilität des Eisens ist 9,
2. die Permeabilität des Eisens ist 99,
3. die Permeabilität des Eisens ist unendlich.

Aufgabe 68

a) Zwei miteinander parallellaufende Ströme fließen in einer Ebene, die zu zwei parallelen ebenen Eisenflächen parallel liegt.
b) Die Ströme sind gleichgroß, aber entgegengesetzt gerichtet.
Es soll jeweils das Magnetfeld dieser Ströme gezeichnet werden.

Aufgabe 69

Es soll das Magnetfeld des Längsschnittes eines Solenoides unter der Annahme gezeichnet werden, daß der Querschnitt der Leiter eine zusammenhängende Schicht konstanter Stromdichte bildet.

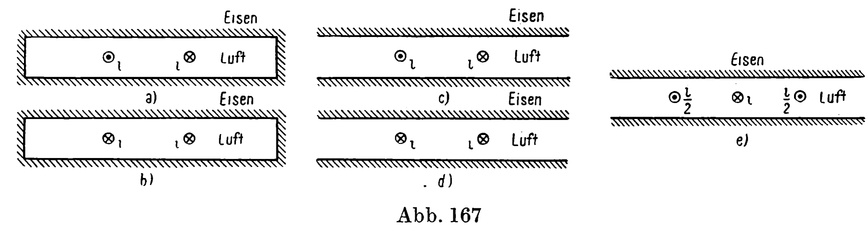


Abb. 167

Aufgabe 70

Es sollen die Flußbilder der in Abb. 167 skizzierten Anordnungen gezeichnet werden.

Aufgabe 71

Das Kraftlinienbild einer Drehstromleitung soll für den Augenblick gezeichnet werden, in dem einer der Ströme seinen Maximalwert erreicht hat. Dabei ist angenommen, daß die Stromleiter in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks liegen.

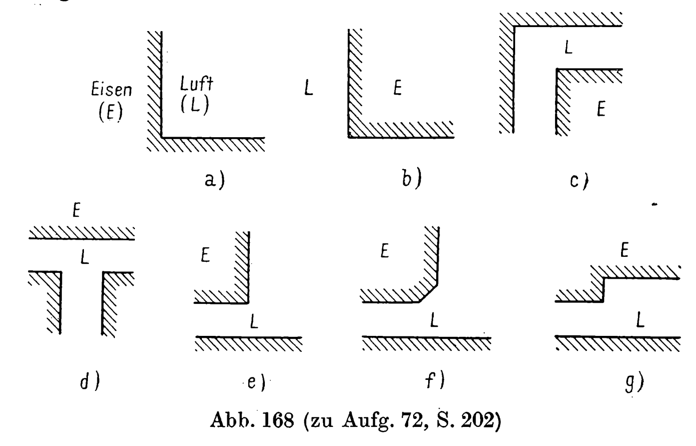


Abb. 168 (zu Aufg. 72, S. 202)

Aufgabe 72

Die Flußbilder der in Abb. 168 (S. 201) skizzierten Feldabschnitte sollen mit Hilfe des graphischen Verfahrens der krummlinigen Quadrate gezeichnet werden. Die Permeabilität des Eisens ist als unendlich anzunehmen.

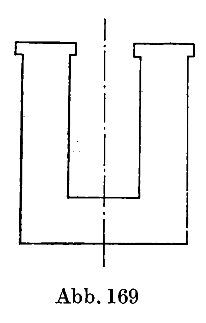


Abb. 169

Aufgabe 73

Es sollen das Kraftlinienbild des in Abb. 169 gezeichneten offenen Hufeisenmagneten und die Induktionsverteilung entlang der Mittellinie gezeichnet werden.
Die *Lösung* ist in Abb. 179 (S. 208) angegeben.

Aufgabe 74

Es soll das resultierende Kraftlinienbild konstruiert werden, wenn in ein homogenes magnetisches Feld ein einziger Stromfaden senkrecht zu den Kraftlinien gelegt wird.

Aufgabe 75

Es ist das Kraftlinienbild nach dem Einbringen eines Stabmagneten in ein angenähert homogenes Feld zu zeichnen. Dabei ist das Kraftlinienbild als Resultierende des ursprünglich angenäherten homogenen Feldes und des durch die Molekularströme im Stabmagneten erzeugten Feldes zu betrachten.

Aufgabe 76

Das Kraftlinienbild nach Aufgabe 75 soll näherungsweise für den Fall gezeichnet werden, daß das homogene Feld im Luftspalt eines Eisenringes auftritt und die Durchflutung des Kreises unverändert bleibt.

Aufgabe 77

Es soll in der in Beispiel 31 gezeigten Weise das Magnetfeld von zwei gleichgroßen parallelfließenden Strömen aufgezeichnet werden, wenn

1. die Ströme die gleiche Richtung,
2. die entgegengesetzte Richtung und im Verhältnis zu ihrer Entfernung kleine Querschnitte haben.

Aufgabe 78

Nach dem Verfahren von Beispiel 31 ist das Magnetfeld zweier paralleler Leiter kleinen Querschnittes, die den Strom $3i$ bzw. i führen, aufzuzeichnen unter der Voraussetzung, daß

1. die beiden Ströme gleiche Richtung,
2. die beiden Ströme entgegengesetzte Richtung

haben.

Aufgabe 79

Es soll zu den beiden Leitern der Aufgabe 78.1 ein dritter Strom parallel und in gleicher Ebene fließen. Mit Hilfe der Lösung der Aufgabe 78 ist nach dem Superpositions-Prinzip das Bild des sich ergebenden Magnetfeldes zu konstruieren. Die Aufgabe soll auch mit dem Strom $-i$ durchgeführt werden.

Aufgabe 80

Nach dem Muster der Aufgabe 79 ist das magnetische Feld einer Drehstromleitung, die gleichmäßig angeordnet ist, z. B. in einer Ebene oder an den Ecken eines gleichseitigen Dreieckes, beim Maximalwert des Stromes in einer Phase aufzuzeichnen.

Aufgabe 81

Mit Hilfe des Vektor-Potentials ist zu beweisen, daß sich außerhalb einer unendlich langen dicht gewickelten geraden Spule kein Magnetfeld befinden kann.

Aufgabe 82

Man zeichne das Kraftlinienbild in einer von einem Material mit unendlicher Permeabilität begrenzten Ecke

1. von 90° nach dem „Verfahren der krummlinigen Quadrate“ (das Ergebnis ist mit dem Kraftlinienbild im Beispiel 28 zu vergleichen),
2. von 270° durch konforme Abbildung unter Anwendung der SCHWARZschen Transformation. Das Ergebnis ist mit dem Ergebnis des Beispiels 32 zu vergleichen.

Aufgabe 83

Ein flaches, sehr dünnes Kupferband der Breite d führt einen sich gleichmäßig verteilenden Gleichstrom i. Es soll die Induktion in der Bandebene im senkrechten Abstand a vom nächstgelegenen Rand des Bandes bestimmt werden.

Lösung:

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \ln \frac{a+d}{a} .$$

Aufgabe 84

Die Flußlinien erreichen die Grenzlinien zwischen Eisen und Luft vom Eisen her gesehen unter einem Winkel von 45°.

Wie groß ist der von der Senkrechten eingeschlossene Winkel in Luft, wenn die relative Permeabilität des Eisens 5, 10, 100 beträgt?

Lösung:

1. $11°20'$;
2. $5°50'$;
3. $35'$.

Aufgabe 85

Es soll das schematische Kraftlinienbild folgender in Luft befindlicher Leiteranordnungen gezeichnet werden:

a) Zwei parallele, lange, gerade Leiter mit kleinem Querschnitt

1. mit gleichgroßen Strömen in entgegengesetzter Richtung,
2. mit den Strömen i und $\frac{i}{2}$ in entgegengesetzter Richtung,
3. mit den Strömen i und $\frac{i}{2}$ in gleicher Richtung.

b) Vier parallele, gerade Leiter mit kleinem Querschnitt, angeordnet in den Eckpunkten eines Quadrates mit

1. Strömen gleicher Stärke und in gleicher Richtung,
2. Strömen gleicher Stärke, davon 2 in gleicher und 2 in entgegengesetzter Richtung.

Aufgabe 86

Die Fälle 1., 2., 3. der Aufgabe 85 sollen mit der Zeichnung des elektrischen Kraftfeldes ähnlich angeordneter elektrischer, linienförmig angeordneter Ladungen verglichen werden.

Aufgabe 87

Es sollen die Kraftlinienbilder der in Abb. 170a und 170b dargestellten Anordnungen gezeichnet werden.

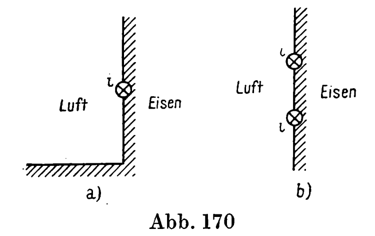


Abb. 170

Aufgabe 88

Es ist die Darstellung des Magnetfeldes zweier paralleler Leiter mit großen Abmessungen und kreisförmigem Querschnitt zu konstruieren. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Ströme in entgegengesetzter Richtung fließen und die Stromstärken längs des Querschnittes konstant bleiben.

Aufgabe 89

Die Höhe einer sehr dünnen Stromschicht ist $2h$, die Länge unendlich und der Strom i. Wie groß ist die von dieser Stromschicht erzeugte Induktion in dem Punkt, der von den Kanten der Schicht in einer dazu senkrechten Ebene im

Abstand r_1 bzw. r_2 liegt? r_1 bzw. r_2 schließen mit der Normalen der Schicht die Winkel α_1 bzw. α_2 ein.

Lösung:

Liegt die Schicht in der Ebene yz, so ist

$$B_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{2h} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{2h} (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Aufgabe 90

Es soll das Magnetfeld einer quadratischen Schiene mit gleichmäßiger Stromdichte innerhalb und außerhalb des Leiters gezeichnet werden. Der Leiter ist in einige dünne Schichten aufzuteilen, und deren Wirkung ist wie bei der Aufgabe 89 zu berücksichtigen. Die Beiträge der einzelnen Schichten sind zu summieren. Das Feld außerhalb des Leiters soll im Innern des Leiters mit Hilfe der Konstruktionsregeln, die in 2.2 (30) und (31) angegeben sind, fortgesetzt werden.

Aufgabe 91

Die Methode der Aufgabe 90 soll auf zwei parallele, gleichförmige und gleichgroße rechteckige Leiter angewendet werden.

Aufgabe 92

Das Magnetfeld der Anordnung in Aufgabe 90 soll für den Fall gezeichnet werden, daß der Leiter parallel zu einer Ebene unendlicher Permeabilität liegt und daß die Mittellinie des quadratischen Leiters um dessen zweifache Breite von dieser Ebene entfernt ist.

Aufgabe 93

Die Hin- und Rückleitung eines Gleichstromes i erfolgt in zwei konzentrisch zueinander angeordneten Rohren.

Wie groß ist die Induktion

1. innerhalb des inneren Rohres,
2. zwischen den beiden Rohren,
3. außerhalb des äußeren Rohres?

Lösung:

1. 0;
2. $2\mu_0 \cdot \frac{i}{4\pi}$;
3. 0.

Aufgabe 94

Es soll die Tangentialkomponente der Feldstärke in der Nähe der Oberfläche eines zylindrischen Eisenstabes gemessen werden und daraus die Feldstärke im Eisen, die wegen der Kontinuität der Tangentialkomponente gleich der in der Nähe der Oberfläche ist, bestimmt werden.

Wie muß die Probespule für eine derartige Messung der Feldstärke angefertigt werden?

Aufgabe 95

Unter der Voraussetzung, daß die Stromdichte an jeder Stelle des Querschnittes gleich ist, soll die Änderung der Feldstärke senkrecht zur Leiterachse innerhalb und außerhalb eines unendlich langen geraden Leiters mit kreisförmigem Querschnitt unter folgenden Voraussetzungen gezeichnet werden:

1. wenn der Leiter massiv ist,
2. wenn der Leiter sehr dünnwandig und hohl ist,
3. wenn der Leiter dickwandig und hohl ist.

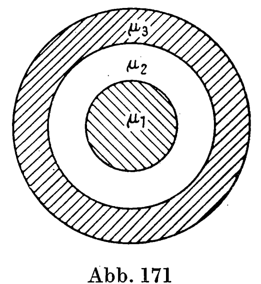


Abb. 171

Aufgabe 96

Die in Abb. 171 dargestellten unendlich langen konzentrischen Leiter führen einen gleichen Strom, jedoch in entgegengesetzter Richtung mit über die Leiter verteilter gleichmäßiger Stromdichte. Es sind die Verteilung der Feldstärke und Induktion zu zeichnen und ihre Gleichungen abzuleiten.

Aufgabe 97

Auf Grund des angenäherten Bildes des Kraftlinienverlaufes ist zu erklären, warum in einem homogenen Magnetfeld ein hohler Eisenzylinder mit zu den Kraftlinien senkrechter Achse eine Schirmwirkung ausübt. Weiterhin ist zu erklären, warum sich hinter einer zu den Kraftlinien senkrechten ebenen Eisenplatte keine Schirmwirkung bemerkbar macht.

Aufgabe 98

Das Flußbild der in Abb. 172 dargestellten Anordnung ist zu zeichnen und daraus die Verteilung der Induktion längs der Strecke *a–a* zu ermitteln. Es handelt sich dabei um das Flußbild eines Wendepols. Zur Kontrolle ist die Induktionsverteilung längs *a–a* maßstäblich in Abb. 177 (S. 208) gezeigt.

Aufgabe 99

Es soll das Flußbild der in Abb. 173 skizzierten Anordnung des Ankerquerfeldes einer Synchronmaschine nach der graphischen Konstruktionsmethode gezeichnet werden. Dabei ist anzunehmen, daß der Strom nur längs der

Linie a–a in einer sehr dünnen Schicht fließt und daß der Höchstwert der Durchflutung, der sich bei sinusförmiger Verteilung ergibt, auf eine Achse in der Mittellinie der Pollücke fällt. Zur Kontrolle der Konstruktion ist die Verteilung der Induktion in Abb. 178 (S. 208) maßstäblich angegeben.

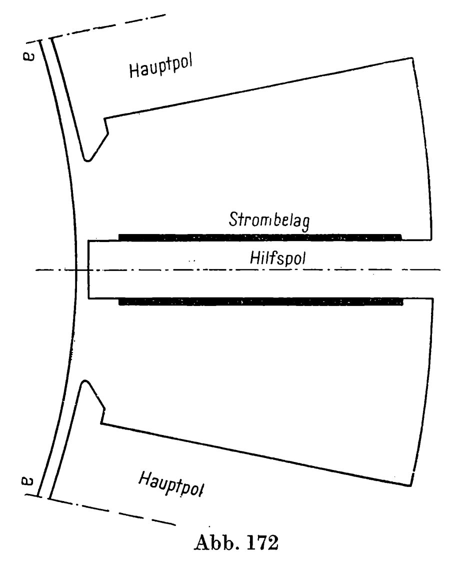


Abb. 172

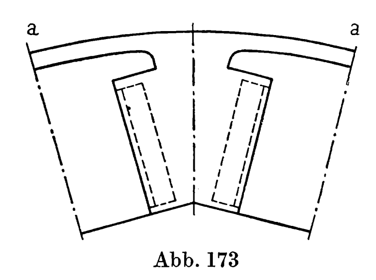


Abb. 173

Aufgabe 100

Es soll das Bild der Streulinien der Stirnfläche der in Abb. 174 skizzierten Maschine mit Lagerschild im Leerlauf aufgezeichnet werden, wenn in den Leitern des Ankers kein Strom fließt.

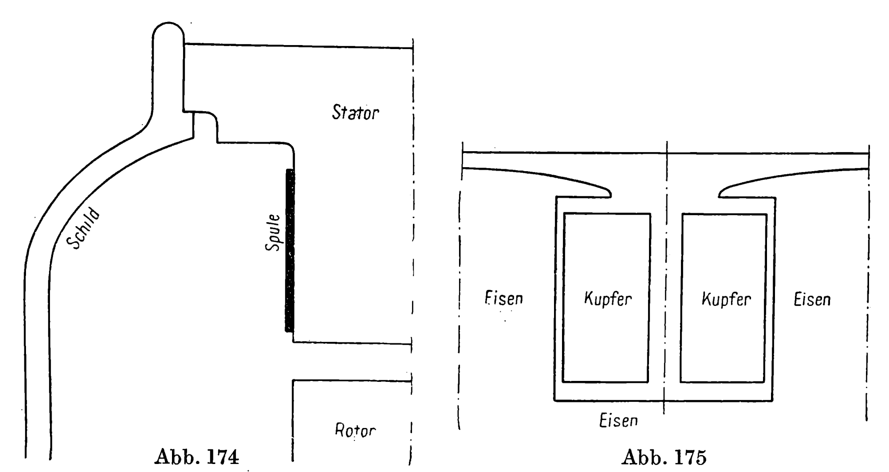


Abb. 174 Abb. 175

Aufgabe 101

Das Flußbild der in Abb. 175 skizzierten Anordnung soll nach dem graphischen Verfahren gezeichnet werden. Die Lösung ist in Abb. 180 (S. 208) angegeben.

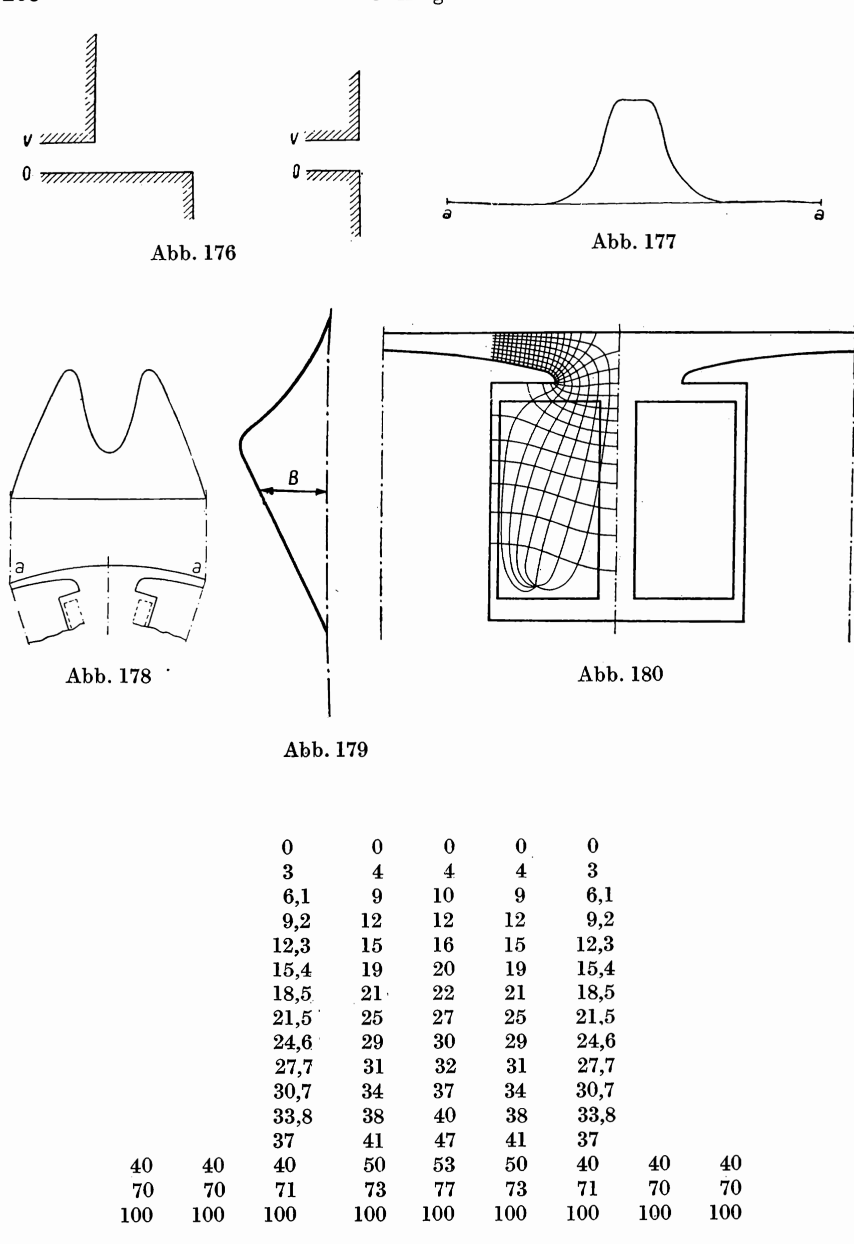


Abb. 176

Abb. 177

Abb. 178

Abb. 179

Abb. 180

		0	0	0	0	0		
		3	4	4	4	3		
		6,1	9	10	9	6,1		
		9,2	12	12	12	9,2		
		12,3	15	16	15	12,3		
		15,4	19	20	19	15,4		
		18,5	21	22	21	18,5		
		21,5	25	27	25	21,5		
		24,6	29	30	29	24,6		
		27,7	31	32	31	27,7		
		30,7	34	37	34	30,7		
		33,8	38	40	38	33,8		
		37	41	47	41	37		
40	40	40	50	53	50	40	40	40
70	70	71	73	77	73	71	70	70
100	100	100	100	100	100	100	100	100

Abb. 181

Aufgabe 102

Es soll das Flußbild der in Abb. 176 dargestellten beiden Schnitte der Stirnstreuung einer elektrischen Maschine mit Hilfe des graphischen, mit wiederholten Versuchen arbeitenden Verfahrens der „krummlinigen Quadrate" gezeichnet werden.

Aufgabe 103

Unter Berücksichtigung der Zahnsättigung soll nach dem Verfahren der Reste das Flußbild einer offenen Nut bestimmt werden, deren Breite das 2fache und deren Tiefe das $6^1/_2$fache des Luftspaltes beträgt. Die Zahnbreite ist damit gleich der Breite der parallelwandigen Nut. Es sollen 60% der magnetischen Spannung auf den Luftspalt, 40% auf den Zahn entfallen und der Spannungsabfall längs des Zahnes gleichmäßig sein.

Lösung:

(Von A. O. MÜLLER, Literaturverzeichnis O [5], Tabelle Abb. 181.)

LITERATURVERZEICHNIS

Bei der Zusammenstellung der Literaturhinweise wurde ein möglichst eingehendes Verzeichnis angestrebt, sowohl von einführenden Werken als auch von Arbeiten über Spezialprobleme. Die Bemerkungen bei den Literaturhinweisen dienen zur Orientierung des Lesers. Sie stellen kein Urteil dar, zumal der Verfasser bestrebt war, seine persönliche Meinung in den Hintergrund zu stellen. Die Bemerkungen sind – soweit möglich – nach eigener Erfahrung zusammengestellt. Einige sind jedoch aus anderen Quellen übernommen (vor allem von E. WEBER – E. [10]).

ALLGEMEINE ÜBERSICHT

I. THEORETISCHE GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK

A. KRAFTWIRKUNGEN ZWISCHEN LADUNGEN

[1] E. G. CULLWICK: The Fundamentals of Electromagnetism. Cambridge University Press, 1949, 2. Aufl.
Die Vorstellungen von CULLWICK wurden, etwas systematischer entwickelt, benutzt. Das Buch ist klar, interessant und modern. CULLWICK weist auf die unter [5], [6] und [7] angegebenen Quellen hin, die die Elektrodynamik ebenfalls auf Kraftwirkungen zwischen den Ladungen aufbauen.
[2] L. H. A. CARR: The M.K.S. or GIORGI System of Units. Proc. I.E.E. 1950, I. S. 235
[3] L. H. A. CARR: The Theory of Relativity. Metropolitan-Vickers Gazette **22,** 1948, S. 378
Zu [2] und [3] siehe auch die Diskussion von [2]
[4] V. P. HESSLER: Teaching Electricity and Magnetism. Electr. Engng. **65,** 1946, S. 828
[5] W. WEBER: Ann. Phys. **73,** 1848, S. 193
Angeregt durch GAUSS, arbeitete WEBER die Theorie der Kraftwirkung zwischen zwei dynamischen Ladungen aus. Eine Besprechung ist bei
[6] MAXWELL: Treatise Bd. II, Teil IV, Kap. 23, zu finden. Die Theorie enthielt gewisse Fehler, da auch die Beschleunigungen als relativ angenommen werden.
[7] W. RITZ: Ann. d. Ch. et d. Phys. (8), **13,** S. 145 bis 275, und Gesammelte Werke, Paris. Die Elektrodynamik von RITZ ist die Weiterentwicklung der Theorie von WEBER. Die Theorie von RITZ ist in [8] und [9] zu finden.
[8] A. O'RABILLY: Electromagnetics. London 1938
[9] W. HOVGAARD: RITZ's Electrodynamic Theory. J. Math. and Phys. (M.I.T.), 1932, Band II, S. 218 bis 254
[10] H. F. BIGGS: The Electro-Magnetic Field. Oxford 1934
Der Verfasser leitet die elektromagnetischen Relationen aus den Kraftwirkungen zwischen dynamischen Ladungen im magnetischen Feld ab.

[11] W. A. TRIPP: An Analysis of Electromagnetic Forces. Electr. Engng. 1945, S. 351 bis 396
Es wird eine allgemeine Formel für den Fall einer Kreisschleife und paralleler Ströme abgeleitet.
[12] R. D. SARD: The Forces Between Moving Charges. Electr. Engng. 1947, S. 61 bis 65
Enthält eine sehr übersichtliche Zusammenfassung des augenblicklichen Standes der Theorie.
[13] C. A. BODDIE: The Motional Mass of the Electron. Electr. Engng. 1947, S. 45 bis 60
In den letzten drei Aufsätzen ist weiteres Schrifttum enthalten. Bemerkungen zu diesen Veröffentlichungen siehe Electr. Engng. 1945, S. 381; 1947, S. 319. (Weitere Literatur) 320, 420, 421, 422, 518, 624, 625, 741, 742, 743, 1162, 1269
[14] T. E. ALLIBONE: The FARADAY Lecture: Atoms, Electrons and Engineers. J. I. E. E. **94**, 1947, I.
[15] L. KNEISSLER-MAIXDORF: Über die MAXWELLsche Theorie für dielektrische und magnetische Medien. Arch. f. Elektr. **34**, 1940, S. 713 bis 728
[16] L. KNEISSLER-MAIXDORF: Zur Theorie des magnetischen Feldes. Arch. f. Elektr. **36**, 1942, S. 471 bis 483
Neue Fassung der MAXWELLschen Theorie mit Elementarkreisströmen.
[17] C. F. GAUSS: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte. Ostwald's Klassiker, Nr. 2, Leipzig 1912

Das Gesetz von Ampère

[18] A. M. AMPÈRE: Ann. d. Ch. et d. Phys. **15**, 1820, S. 59 und 170
[19] A. M. AMPÈRE: Théorie des Phénomènes Electro-Dynamiques. 1826
[20] MAXWELL: Treatise II., art. 528
[21] BECKER: Theorie der Elektrizität. 19. Aufl., I. Bd., S. 122, Teubner, Leipzig 1948

Das Vektorpotential

[22] MAXWELL: Trans. Camb. Phil. Soc. X. S. 27
[23] MAXWELL: Treatise II., art. 617
[24] SMYTHE: Static and Dynamic Electricity. McGraw-Hill, New York 1939

Retardierung

[25] NOVOBÁTZKY-NEUGEBAUER: Theoretische Elektrizitätslehre und Wellenoptik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957 (Übers. a. d. Ung.)
[26] MOULLIN: Principles of Electromagnetism. Oxford 1932, S. 262 bis 265
MASON: Phys. Rev. **15**, 1920, S. 312

Zur Definition der Feldgrößen

[27] J. WALLOT: Die physikalischen und technischen Einheiten. ETZ **43**, 1922, S. 1329 bis 1333, 1381 bis 1386
[28] J. WALLOT: Zur Definition der magnetischen Feldgrößen. ETZ **47**, 1926, S. 1009
[29] J. WALLOT: Magnetische Einheiten. ETZ **53**, 1932, S. 241
[30] F. HUND: Eine Übersicht über die elektromagnetischen Einheiten. Phys. Z. **39**, 1938, S. 576
[31] J. WALLOT: Zur Definition der Größen des elektromagnetischen Feldes und zur Theorie der Maßsysteme. Phys. Z. **44**, 1943, S. 17 bis 31
[32] H. NEUMANN: Magnetische Spannung und magnetische Feldstärke. ATM V 390–1
[33] DIN 1325 (1946) Magn. Feld, Begriffe; DIN 1939 (1946) Magn. Einheiten; DIN 1324 (1946) El. Feld, Begriffe; Definition of El. Terms ASA C 42–1941

B. DAS FLUSSBILD

Hierher gehören im allgemeinen die Werke mit dem Titel „Allgemeine Elektrotechnik", die sich nicht auf die Kenntnis der allgemeinen mathematischen Theorie des elektromagnetischen Feldes stützen. Typisch hierfür sind die Bücher von POHL, THOMÄLEN, CORNELIUS. Das Flußlinienbild stammt von FARADAY. Dadurch wurde die Theorie von MAXWELL vorbereitet. Literatur zu FARADAY:

[1] M. FARADAY: Experimental Researches in Electricity; 3 Bde., B. Quaritch 1839 bis 1855, London; FARADAYS Diary (Bell)
[2] J. J. FAHIE: Magnetism, electricity and electro-magnetism up to the time of the crowning work of MICHAEL FARADAY in 1831. J. I. E. E. **69**, 1931, S. 1329
[3] W. CRAMP: The Birth of Electrical Engineering. J. I. E. E. **69**, 1931, S. 1357
[4] HELMHOLTZ: FARADAY – Vorlesung 1881

Zur Strömung der elektromagnetischen Energie

[5] J. H. POYNTING: On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field. Phil. Trans. 1884 (CLXXV) S. 343
[6] W. M. THORTON: Insulators as Transmitters of Energy (Inaug. Address). J. I. E. E. **76**, 1935, S. 8
[7] W. M. THORTON: The Transformation of Energy in Power Plants. World Power. **18**, 1932, S. 232; **19**, 1933, S. 13
[8] F. DAHLGREEN: Some Remarks on the Energy Flow in Rotating Elektr. Machines. Trans. Roy. Inst. of Techn. Stockholm, No. 38, S. 1 bis 15
[9] I. FISCHER: Einführung in die klassische Elektrodynamik. Springer 1936. S. 127ff.
[10] P. CORNELIUS: Kurze Zusammenfassung der Elektrizitätslehre. Springer, Wien 1951

C. DIE MAXWELLSCHEN GLEICHUNGEN

Hierher gehören fast alle Werke mit dem Titel „Theoretische Elektrotechnik"

[1] P. L. KALANTAROW – L. R. NEUMAN: Theoretische Elektrotechnik, Verlag Technik, Berlin 1954 (Übers. a. d. Russ.)
[2] RAMO-WHINNERY: Fields and waves in modern radio. 2 ed., Wiley, New York 1953
[3] K. SIMONYI: Theoretische Elektrotechnik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Übers. a. d. Ung.)
[4] A. SOMMERFELD: Vorlesungen über theoretische Physik. 3. Bd., 1. bis 3. Aufl., Leipzig 1929/1933
[5] H. H. SKILLING: Fundamentals of Electric Waves. 2. Aufl., Wiley, New York 1948, S. 254. Einfach, klar.
[6] S. A. SCHELKUNOFF: Electromagnetic Waves. Van Nostrand, 1943
[7] W. O. SCHUMANN: Elektrische Wellen. C. Hanser, München 1948, S. 336 Ausgezeichnete Zusammenfassung von an vielen Stellen verstreuten theoretischen Ergebnissen, ausgehend von den MAXWELLschen Gleichungen und dem POYNTINGschen Vektor. Enthält viele Beispiele und weiteres Schrifttum.
[8] J. CARSON: Electromagnetic Theory and the Foundations of Electric Circuit Theory; Bell Syst. Techn. J. 1927, S. 1 bis 17. Die Ableitung der Gleichung des Reihenschwingkreises und der Telegraphengleichung aus den Zusammenhängen der allgemeinen Theorie der elektromagnetischen Felder von MAXWELL und LORENTZ. CARSON prüft auch die nötigen Näherungen und Voraussetzungen.

D. ALLGEMEINES SCHRIFTTUM ZUR POTENTIALTHEORIE

[1] H. BATEMAN: Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Dover Publ., New York 1944
Allgemeine Behandlung von Randwertproblemen in verschiedenen Koordinatensystemen; Anwendungen auf alle Gebiete der Physik.

[2] W. E. BYERLY: Fourier Series and Spherical, Cylindrical, and Ellipsoidal Harmonics. Ginn, Boston 1902
Viele physikalische Anwendungen, besonders auf dem Gebiet der elektrischen Felder und der Wärmefelder.

[3] R. V. CHURCHILL: Fourier Series and Boundary Value Problems. McGraw-Hill, New York 1941
Ausgezeichnete Einführung in die Lösung von Randwertproblemen auf allen Gebieten der Physik.

[4] R. COURANT – D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik. I. Bd. 1931, II. Bd. 1937, Springer, Berlin
Sehr gründliche und genaue mathematische Behandlung mit zahlreichen physikalischen Anwendungen.

[5] G. C. EVANS: The Logarithmic Potential, Discontinous DIRICHLET and NEUMANN Problems. Amer. Mathematical Soc. Coll. Publications, IV. Bd., New York 1927

[6] PH. FRANK – R. V. MISES: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Abschnitte 14, 16 und 17
Reichhaltige Beiträge aus jedem Gebiet der physikalischen Anwendungen.

[7] A. GRAY – G. B. MATTHEWS – T. M. MACROBERT: A treatise on BESSEL Functions and Their Applications in Physics. Macmillan, London 1931
Zahlreiche Anwendungen auf Wärmefelder.

[8] N. M. GÜNTER: Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik (Übersetzung). Teubner, Leipzig 1957

[9] E. HEINE: Anwendungen der Kugelfunktionen. Berlin 1881
Zahlreiche Anwendungen von sphärischen, Ellipsoid- und BESSEL-Harmonischen.

[10] E. W. HOBSON: Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Univ. Press, Cambridge 1931
Sehr eingehende Behandlung dieser harmonischen Funktionen mit vielen Anwendungen auf Potentialprobleme. Ein umfassendes modernes Buch.

[11] JAHNKE – EMDE: Tafeln Höherer Funktionen. 5. Aufl., Leipzig 1951

[12] O. D. KELLOGG: Foundations of Potential Theory. Springer, Berlin 1929
Klassisches Werk über die Potentialtheorie auf jedem Gebiet der Physik; exakte Grundlage der Lösungen.

[13] A. KORN: Lehrbuch der Potentialtheorie. 2. Bd., Berlin 1901

[14] J. LENSE: Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. III. Teil, Berlin–Leipzig 1933 (3. Aufl. Berlin 1953)

[15] MACMILLAN: The theory of the potential. New York 1930
Enthält viele Anwendungen und Beispiele.

[16] T. M. MACROBERT: Spherical Harmonics. E. P. Dutton, New York 1927
Bringt auch elektrotechnische Anwendungen.

[17] F. D. MURNAGHAN: Introduction to Applied Mathematics. Wiley, New York 1948
Moderne Behandlung der Potentialtheorie mit elektrotechnischen Anwendungen. Allgemeine Randwertprobleme mit GREENscher Funktion und Integralgleichungen.

[18] B. O. PEIRCE: Newtonian Potential Function. Ginn, Boston 1902
Bringt die mathematische Theorie des Gravitationspotentials mit einigen elektrotechnischen Anwendungen.

[19] PLEMELJ: Potentialtheoretische Untersuchungen (Preisschrift der JABLONOWSKIschen Gesellschaft), Heft 40/1911
Enthält wichtige Hinweise.
[20] F. SCHWANK: Randwertprobleme. S. 94ff. Teubner, Leipzig 1951
Hervorragendes, klar geschriebenes Buch.
[21] W. STERNBERG: Potentialtheorie. Samml. Göschen 901, 944. de Gruyter, Leipzig 1925
[22] WANGERIN: Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Sammlung Schubert 58, 59, Leipzig 1923, 1921
[23] WEBSTER – SZEGÖ: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Abschnitt 5, Leipzig–Berlin 1930
Angabe der Lösungen und Methoden mit zahlreichen Anwendungen für jedes Gebiet der Physik.

Der Leser vergleiche auch

[24] W. I. SMIRNOW: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III 2, 3. Aufl. (mit ausführlichen Literaturhinweisen der Herausgeber). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961 (Übers. a. d. Russ.)

sowie

[25] A. N. TYCHONOFF – A. A. SAMARSKI: Differentialgleichungen der mathematischen Physik (ebenfalls mit ausführlichem Literaturverzeichnis). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959 (Übers. a. d. Russ.)

II. BERECHNUNG UND KONSTRUKTION VON MAGNETFELDERN

E. ALLGEMEINES (zu Abschn. (8.))

[1] P. L. KALANTAROW – L. R. NEUMAN: Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik. 464 S., S. 378 bis 397. Konstruktion: S. 388; Gosenergoisdat, Moskau–Leningrad 1951
[2] W. A. GOWORKOW: Elektrische und magnetische Felder. 338 S., Szvjasisdat 1951
Ausgezeichnete Übersicht über die Theorie der Felder und besonders über ihre Berechnung. S. 116f. Konstruktion: S. 183f.
[3] P. A. JONKIN – W. S. PANTJUSCHIN – W. A. SMIRNOW: Aufgaben- und Beispielsammlung zur allgemeinen Elektrotechnik. Moskau 1951
[4] E. A. STRAUF: Elektrizität und Magnetismus. 588 S., S. 332. Gostechisdat, Moskau–Leningrad 1950
[5] L. R. NEUMAN: Leitfaden zu Laboratoriumsuntersuchungen des elektromagnetischen Feldes. S. 113. Gosenergoisdat, Moskau–Leningrad 1950
[6] K. A. KRUG – W. J. LOMONOSSOW – M. A. PEREKALIN – K. M. POLIWANOW: Aufgabensammlung zu den theoretischen Grundlagen der Elektrotechnik. Gosenergoisdat, 1948
[7] E. ROTH: Bull. Soc. franc. S. 13 bis 130, El. 5e série. 1937
[8] ATM V 8251 – 1, 2. Verfahren zur Untersuchung magnetischer, elektrostatischer und thermischer Felder in Maschinen. Teil I Analytische Verfahren. Teil II Graphische und experimentelle Verfahren.
Kurze Übersicht und Zusammenfassung der Untersuchung zweidimensionaler physikalischer Felder. Enthält weiteres reichhaltiges Schrifttum.

[9] Th. Lehmann: Lumière électr. 1909, S. 103, 137, 163; Rev. gén. El. 1923, S. 165, 374, 395; 1926, S. 43, 85; 1927, S. 1105; 1928, S. 387, 427, 477; 1929, S. 521; 1932, S. 171; 1933, S. 351; 1934, S. 757. In diesen Aufsätzen schuf Lehmann die Grundlage der graphischen Methoden.
[10] E. Weber: Mapping of Electric and Magnetic Fields. Wiley, New York 1951
Ein sehr umfassendes, gründliches und modernes Lehrbuch über die Berechnung und Konstruktion elektrischer und magnetischer Felder.
[11] S. S. Attwood: Electric and Magnetic Fields. 3. Aufl. 471 S., Wiley, New York 1949
Enthält ausgezeichnete Flußbilder.
[12] L. V. Bewley: Two-dimensional Fields in Electrical Engineering. Macmillan, New York 1948
[13] A. D. Moore: Fundamentals of Electrical Design. McGraw-Hill, New York 1927
[14] B. Hague: Electromagnetic Problems in Electrical Engineering. Oxford Univ. Press, London 1929
Enthält die grundsätzliche Theorie der mit Magnetfeldern verbundenen Probleme, ferner die Lösung zahlreicher komplizierter Aufgaben, darunter auch solcher, die Eisen-Kreise betreffen. Grundlegendes Werk auf diesem Gebiet.
[15] B. Hague: C. R. du Congrès Int. d'Electricité. Rapport Nr. 7. IV. Bd. 1932
[16] H. C. Roters: Electromagnetic Devices. Wiley, New York 1941
Das beste Werk in englischer Sprache über die Berechnung von Elektromagneten.
[17] E. Jasse: Die Elektromagnete. Springer, Berlin 1930
Behandelt die magnetischen Kreise und Kraftwirkungen vom Standpunkt des Konstrukteurs.
[18] F. W. Grover: Inductance Calculations. Van Nostrand, New York 1948
Große Sammlung der Induktivitätsformeln einfacher Kreise und Spulen. Mit vielen Tabellen.
[19] J. Hak: Eisenlose Drosselspulen. K. F. Koehler, Leipzig 1938
Enthält mehrere Induktivitätsberechnungen eisenfreier Spulen und eine sehr gründliche Bibliographie.
[20] E. B. Moullin: The Principles of Electromagnetism. Oxford Univ. Press, London 1932
Gute Einführung. Praktische Lösung vieler einfacher Probleme.
[21] M. Liwschitz: Die elektrischen Maschinen. Bd. 3. Berechnungsprinzipien. Springer, Berlin 1934
Bringt die praktische Theorie der graphischen Konstruktion.
[22] R. Richter: Elektrische Maschinen. I. bis V. Bd. (1924 bis 1949)
In jedem Bande befinden sich Probleme der Berechnung und der Konstruktion magnetischer Kreise und Felder. Siehe auch den Aufsatz von R. Richter (Q, [13]).
[23] H. Ebert: Magnetische Kraftfelder. 1 bis 2. Aufl. Barth, Leipzig 1905
[24] J. C. Maxwell: A Treatise on Electricity and Magnetism. 3. Aufl. Bd. 1, art. 123, Clarendon Press, Oxford 1892

F. ALLGEMEINES ÜBER DIE BERECHNUNG MAGNETISCHER FELDER (zu Abschn. (7.))

[1] Kalantarow – Neuman: siehe E, [1], S. 108, 395
[2] P. N. Goriunow – S. M. Pigin – N. N. Sumilowski: Elektrizitätszähler. 133 S., Gosenergoisdat, Moskau-Leningrad 1951
Der magnetische Kreis. Gleichwertige (elektrische) Schaltungen.

[3] M. A. Babikow: Wichtige Bauteile elektrischer Apparate. Verlag Technik, Berlin 1954 (Übers. a. d. Russ.)
Band I, I. Teil. Theoretische Einführung. Ausgezeichnetes Buch über die Theorie der Berechnung von elektrischen Apparaten. Bringt weitere Literatur. Zum vorliegenden Werk s. S. 33: Berechnung des magnetischen Kreises; S. 40: Berechnung des magnetischen Flusses bei Gleichstromerregung; S. 51: Berechnung des magnetischen Flusses bei Wechselstromerregung; S. 79 bis 92: Permanente Magnete.

[4] W. I. Kowalenkow: Theoretische Grundlagen der Magnetkreise. Akademisdat, Moskau 1940

[5] B. S. Sotskow: Berechnungsmethoden magnetischer Gleichstromkreise. Avtomatika i telemehanika, 1940, 2

[6] N. N. Schumillowski: Komplexe Methode zur Berechnung magnetischer Kreise. Avtomatika i telemehanika, 1940, 4.

[7] E. A. Rabinowitsch – W. D. Surgutschew: Aufgabensammlung zur allgemeinen Elektrotechnik. S. 29. Gosenergoisdat, Moskau-Leningrad 1951

[8] P. A. Jonkin – W. S. Pantjuschin – W. A. Smirnow: siehe unter den Beispielen von Abschnitt E [3]
Sehr gute Aufgabensammlung. Behandelt auch zusammengesetzte magnetische Kreise.

[9] E. A. Strauf: siehe E, [4], S. 369 ff.

[10] W. Karapetoff: The Magnetic Circuit. McGraw-Hill, New York 1910. Einfache Behandlungsweise.

[11] Massachusetts Institute of Technology, El. Eng. Staff: Magnetic Circuits and Transformers. 718 S., Wiley, New York 1943
Sehr klare, gründliche und eingehende Darstellung der Grundprinzipien, mit Betonung der physikalischen Prinzipien und der didaktischen Anschauung über die Systematisierung. Empfehlenswert. Enthält weitere Literatur.

[12] A. M. Gray: Electrical Machine Design. McGraw-Hill, New York 1926
Behandelt praktische Einzelheiten der Berechnung magnetischer Kreise.

G. DIE STREUUNG (zu Abschn. (9.))

Die Streuung ist in der Literatur weitgehendst behandelt. Die folgenden Aufsätze enthalten ein ausführliches Schrifttumsverzeichnis:

[1] J. K. Kuhlmann: Physical Concept of Leakage Reactance. Electr. Engng. **67**, 1948, S. 142 bis 146

[2] K. Sixtus: Messung der magnetischen Streuung. ATM V 393–1–2–3. Okt. 1947; Febr. 1948

Die genaue Theorie der Streuung ist immer noch nicht eindeutig geklärt. Bezüglich der Grundprinzipien sind die Referenzen 23. aus [1] und 3., 4., 10., 11. aus [2] zu empfehlen.

H. BERECHNUNG MAGNETISCHER KREISE MIT HILFE DES VEKTORPOTENTIALS (zu Abschn. (15.))

[1] Kalantarow – Neuman: siehe E, [1], S. 379

[2] Goworkow: siehe E, [2], S. 169

[3] K. Küpfmüller: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 3. Aufl., S. 257, Springer, Berlin 1941

[4] R. ROTHE – F. OLLENDORFF – K. POHLHAUSEN: Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Springer, Berlin 1931
Bestimmung der Felder von linienartigen Strömen mit Vektorpotential. Anwendung der Superposition.
[5] A. R. STEVENSON – R. H. PARK: Graphical Determination of Magnetic Fields. Theoretical Considerations. Trans. A. I. E. E. 46, 1927, S. 112 bis 135, siehe Q, [26]
[6] B. L. ROBERTSON – I. A. TERRY: Analytical Determination of Magnetic Fields. Trans. A. I. E. E. 48, 1929, S. 1242 bis 1262
In ähnlichem Sinne gehalten wie [5]
[7] J. W. MCRAE: The Magnetic Vector Potential. Electr. Engng. 1936, S. 534

I. BERECHNUNG MAGNETISCHER FELDER NACH DEM GESETZ VON BIOT UND SAVART (zu Abschn. (16.))

[1] KALANTAROW – NEUMAN: siehe E, [1], S. 100
[2] GOWORKOW: siehe E, [2], S. 121
[3] STRAUF: siehe E, [4], von S. 334ff.
[4] R. BECKER: Theorie der Elektrizität. 15. Aufl., Bd. I, S. 112, Teubner, Leipzig 1948
[5] A. A. HALACSY: Practical Calculation of Magnetizing Force. Proc. I. E. E. 1950. I. S. 37

J. BERECHNUNG MAGNETISCHER FELDER MIT FOURIER-REIHEN. GRENZBEDINGUNGEN

Über FOURIER-Reihen im allgemeinen

[1] „Oeuvres de FOURIER." Bd. 1, S. 140, Gauthier-Villars, Paris 1888
[2] W. ROGOSINSKI: FOURIERsche Reihen. Berlin-Leipzig 1930

Man vergleiche auch

[2a] W. I. SMIRNOW: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II, Kap. VI. 4. Aufl. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1961 (Übers. a. d. Russ.)

sowie

[2b] G. P. TOLSTOW: Fourierreihen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955 (Übers. a. d. Russ.)

Beide Bücher enthalten weitere Literaturhinweise.

Streuung von Transformatoren

[3] W. ROGOWSKI: Über das Streufeld und den Streuinduktionskoeffizienten eines Transformators mit Scheibenwicklung und geteilten Endspulen. Mitteilungen über Forschungsarbeiten des V. D. I. 1909, 71. Ein grundlegendes, aber schwer erhältliches Werk. Gültig für ausgeglichene Scheibenanordnung. (Vgl. ETZ 1910, S. 1033 bis 1036 und 1069 bis 1071)
[4] A. R. STEVENSON: Fundamental Theory of Flux Plotting. Gen. Electr. Rev. 1926, S. 797 bis 804
Ausführliche Erörterung des Aufsatzes von ROGOWSKI.
[5] Die Methode wurde allgemeiner und für moderne Transformatoren von ROTH weiterentwickelt. Das Verzeichnis seiner Arbeiten ist im nächstgenannten Aufsatz von BILLIG [6] zu finden.
Die Anwendung der Ergebnisse von ROTH erfordert viel Arbeit. Diese versuchte BILLIG zu vermindern.

[6] E. BILLIG: The Calculation of the Magnetic Field of Rectangular Conductors in a Closed Slot, and its Application to the Reactance of Transformer Windings. Proc. I. E. E. 1951, II. S. 648. Weiteres Schrifttum bei BILLIG.

Sonstige Probleme

Die Methode von ROGOWSKI wurde von STEVENSON und PARK auf die Polstreuung eines Synchrongenerators und von RHEA auf die Streuung der Kreisnut angewandt:

[7] A. R. STEVENSON – R. H. PARK: siehe H, [5]
Derselbe Aufsatz in Gen. Electr. Rev., 1928, S. 99 und 159

[8] ROBERTSON – TERRY: siehe H, [6]

Verteilung des Magnetfeldes in der Nähe eines Zugbolzens

[9] B. HAGUE: J. I. E. E. 64, 1926, S. 479

K. KOMPLEXE FUNKTIONENLEHRE UND KONFORME ABBILDUNG IM ALLGEMEINEN

Kürzere Einführungen

[1] W. A. GOWORKOW: siehe E, [2], S. 201 bis 218

[2] A. BETZ: Konforme Abbildung. Berlin 1948

[3] L. V. BEWLEY: Two-dimensional Fields in Electrical Engineering. Macmillan, New York 1948
Behandelt parallel die entsprechenden Probleme verschiedener Wissenschaftszweige vom Standpunkt der komplexen Funktionslehre.

[4] L. BIEBERBACH: Einführung in die konforme Abbildung. Sammlung Göschen, Leipzig 1915

[5] L. BIEBERBACH: Einführung in die Funktionentheorie. 2. Aufl., Bielefeld 1950

[6] R. E. DOHERTY – E. G. KELLER: Mathematics of Modern Engineering. Bd. 1, S. 242, Wiley, New York 1936

[7] FALCKENBERG: Komplexe Reihen. Sammlung Göschen, 1027

[8] S. L. GREEN: The Theory and Use of the Complex Variable. Pitman, London 1939

[9] J. HEINHOLD: Theorie und Anwendung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. München 1948

[10] K. KNOPP: Funktionentheorie. Sammlung Göschen, 668. Leipzig 1918

[11] K. KNOPP: Elemente der Funktionentheorie. Sammlung Göschen 1109

[12] L. LEWENT: Konforme Abbildung. Teubner, Leipzig 1912

[13] H. W. REDDICK – F. H. MILLER: Advanced Mathematics for Engineers. 2. Aufl. Abschn. X, Wiley, New York 1947

[14] R. ROTHE – F. OLLENDORF – K. POHLHAUSEN: Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Springer, Berlin 1931
Ausgezeichnete kurze Zusammenfassung; klar, übersichtlich, empfehlenswert.

[15] I. S. SOKOLNIKOFF – E. S. SOKOLNIKOFF: Higher Mathematics for Engineers and Physicists. Abschn. XV, McGraw-Hill, New York 1934

[16] R. ROTHE: Höhere Mathematik. Teil I, S. 187 bis 202, Teubner, Leipzig 1954
Kurz, jedoch äußerst klar und übersichtlich. Bewährtes Lehrbuch.

[17] L. A. PIPES: Applied Mathematics for Engineers and Physicists. McGraw-Hill, 1946
Sehr gute Zusammenfassung.

Man vergleiche auch

[17a] W. I. SMIRNOW: siehe D, [24], Kap. I und II

[17b] I. I. PRIWALOW: Einführung in die Funktionentheorie, Teil I, II, III. Teubner, Leipzig 1958, 1959, 1960 (Übers. a. d. Russ.)

Umfassendere Bücher für Fortgeschrittene

[18] L. Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. 2, 4. Aufl., Leipzig 1934 Zur Weiterbildung, hauptsächlich geeignet für Mathematiker.
[19] H. Burckhardt: Funktionentheoretische Vorlesungen. 2 Bde. 1920, 1921
[20] E. Goursat: Cours d'analyse mathematique. A. Herrmann, Paris 1910, 1911
[21] A. Hurwitz: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie. Springer, Berlin 1929
[22] W. F. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie. I. und II. Teubner, Leipzig 1928, 1932
[23] J. Pierpont: Functions of a Complex Variable. Ginn, Boston 1914
[24] E. Study – W. Blaschke: Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche. Teubner, Leipzig 1913
[25] E. C. Titchmarsh: Theory of Functions. Oxford Univ. Press, 1932
[26] E. T. Whittaker – G. N. Watson: A Course of Modern Analysis. Abschn. 5 und 6; Cambridge Univ. Press, 1927
[26a] G. M. Golusin: Geometrische Funktionentheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957 (Übers. a. d. Russ.)

Weiteres Schrifttum

[27] H. A. Schwarz:
1. Crelles Journal **70,** 1869, S. 105 bis 120,
2. Vierteljahresschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich. Jg. 15., Mai 1870,
3. Aus dem Monatsb. der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin, Oktober 1870,
4. Crelles Journal **74,** 1872, S. 218,
5. Gesammelte Abhandlg. S. 64 und 144

[28] Christoffel:
1. Sopra un problema proposto da Dirichlet. Annali di Matem. **4,** 1871, S. 1.,
2. Über die Bildung einer einblättrigen, einfach zusammenhängenden ebenen Fläche auf einem Kreise. Göttinger Nachrichten 1870,
3. Über die Abbildung einer n-blättrigen, einfach zusammenhängenden ebenen Fläche auf einem Kreise. Göttinger Nachrichten 1870,
4. Ges. math. Abhandlungen, Bd. 1, S. 245

[29] Boehm: Elliptische Funktionen. Teile I und II, Göschen, 1908
[30] Holzmüller: Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildung. Leipzig 1882
[31] Kirchhoff: Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene. Poggendorfs Annalen. Bd. 64, S. 947 ff.
Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. III. Elektrizität und Magnetismus. Teubner, Leipzig 1891
[32] E. Study: Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche. Leipzig und Berlin 1913
[33] J. Thomae: Abriß einer Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und der Thetafunktionen. Halle 1890
[34] Weierstrass – Schwarz: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. 2. Aufl., Springer, Berlin 1893
[35] A. Weinstein: Kontinuitätsbeweis des Abbildungssatzes für Polygone. Mathematische Zeitschrift **21,** 1924, S. 72
[36] W. Blaschke: In Abschnitt V bei Lewent: siehe K, [12]
[36a] L. W. Kantorowitsch – W. I. Krylow: siehe O, [3]

L. ÜBER DIE KONFORME ABBILDUNG UND DIE ELEKTROTECHNISCHE ANWENDUNG DER SCHWARZ-CHRISTOFFELSCHEN TRANSFORMATION

(zu Abschn. (21.)), s. jedoch auch K [35]

[1] NEUMAN – KALANTAROW: siehe E, [1], S. 381 ff.
[2] KÜPFMÜLLER: siehe H, [3], S. 110
[3] WEBER: siehe E, [10]
[4] F. SCHWANK: Randwertprobleme, Teubner, Leipzig 1951. Literaturangaben.
[5] E. WEBER: Die konforme Abbildung in der elektrischen Festigkeitslehre. Arch. f. Elektr. **17,** 1927, S. 174 bis 200
Sehr gute Zusammenfassung der Theorie.
[6] E. WEBER: Mapping of Fields. Electr. Engng. 1934. S. 1571
Ganz kurze Zusammenfassung.
[7] ROTHE – OLLENDORF – POHLHAUSEN: Die entsprechenden Abschnitte des Werkes von H, [4], besonders Teil C
[8] PH. FRANK – R. MISES: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. 2. Aufl., Vieweg, Braunschweig 1935
[9] F. OLLENDORF: Potentialfelder der Elektrotechnik. Berlin 1932
Zusammenfassendes Lehrbuch. Enthält zahlreiche weitere Literaturhinweise.
[10] K. FREY: Anwendungen der konformen Abbildung auf praktische Probleme des Elektromaschinenbaues. Arbeiten aus dem elektrotechnischen Institut Karlsruhe. IV. 1920 bis 1924 (R. RICHTER).
Befaßt sich nur mit den magnetischen Feldern in Luft bei elektrischen Maschinen, erklärt jedoch vorher die Theorie der Transformation. Enthält ausführliche, vollständig ausgearbeitete Beispiele.
[11] M. WALKER: Conjugate functions for engineers. A simple exposition of the SCHWARZ-CHRISTOFFEL transformation applied to the solution of problems involving two-dimensional Fields of force and flux. London 1933
Einfache Beschreibung der Transformation mit Beispielen.
[12] E. A. GUILLEMIN: The Mathematics of Circuit Analysis. Wiley, New York 1949
Der entsprechende Abschnitt bringt eine gute Einführung mit Beispielen.
[13] F. W. CARTER: Air Gap Induction. El. World **28,** 1901, S. 884
Bringt die Transformationsfunktion ohne Erläuterung und ist schwer zu verfolgen. Seine Ergebnisse: Die sogenannten CARTER-Faktoren werden in der ganzen Welt gebraucht. Klassische Quelle des Problems.
[14] F. W. CARTER: Notes on Air-Gap and Interpolar Induction. J. I. E. E. **29,** 1900, S. 925 bis 933
Entspricht ungefähr [13]. Aufsatz [13] ist etwas klarer.
[15] F. W. CARTER: The Magnetic Field of the Dynamo-Electric Machine. J. I. E. E. **64,** 1926, S. 359
[16] J. HADAMARD: Ann. d. Ch. et d. Phys. **16,** 1909, Zweite Folge, S. 403
Analytische Lösung der Nut von endlicher Tiefe.
[17] G. STEIN – E. UHLMANN: Forschung und Technik. S. 69 bis 83, Springer, Berlin 1930
Die CARTERsche Methode für Dreiphasentransformatoren.
[18] L. DREYFUS: Die Berechnung der Wirbelstromverluste in den unmagnetischen Preßringen großer Turbogeneratoren. Arch. f. Electr. **27,** 1933, S. 295 bis 304. Siehe Beispiel 29.
[19] J. LAMMERANER: Zahnspitzenstreuung. Elektrotechnicky Obzor **16,** 1927, S. 651–654
[20] J. KUCERA: Magnetische Zahnstreuungen bei elektrischen Maschinen. Elektrotechnik und Maschinenbau **58,** 1940, S. 329 bis 338

M. ANWENDUNG DER KONFORMEN ABBILDUNGEN IN ANDEREN ZWEIGEN DER WISSENSCHAFT

Eingehende Literatur ist bei WEBER zu finden: siehe E, [10], L, [5], und L, [6], in den Büchern von ROTHE-OLLENDORF-POHLHAUSEN: H, [4], und SCHWANK: L, [4]

N. BERECHNUNG VON MAGNETFELDERN DURCH VEREINFACHUNG DER FLUSSBILDER (zu Abschn. (22.))

[1] BABIKOW: siehe F, [3], S. 39
[2] W. L. UPSON – E. L. FURTH: Magnetic Leakage and Flux Calculations. J.A.I.E.E. **47**, 1928, S. 340 bis 344
[3] ROTERS: siehe E, [16]
[4] E. ARNOLD: Die Gleichstrommaschine. Bd. I, S. 207, Springer, 1902
[5] DOUGLAS: siehe T, [4]

O. DIE NÄHERUNGSRECHNUNG (METHODE DER RESTE) UND IHRE ANWENDUNG BEI MAGNETISCHEN FELDERN (zu Abschn. (23.) bis (26.))

[1] W. A. GOWORKOW: Berechnung elektrischer und magnetischer Felder mit der Methode des Potentialnetzes. Nr. 3, Elektritschestwo. 1949
Sehr ausführlicher Aufsatz mit zahlreichen ausgearbeiteten Beispielen.
[2] W. A. GOWORKOW: Berechnung elektrischer und magnetischer Felder mit Polarkoordinaten mittels Potentialnetzes. Nr. 7, Elektritschestwo. 1951
Enthält dem vorigen ähnlich ausgearbeitete Zahlenbeispiele. Eingehender, hervorragend zusammenfassender Artikel.
Siehe Inhalt von [1] und [2] auch unter GOWORKOW E, [2], S. 222 bis 237
[3] L. W. KANTOROWITSCH – W. I. KRYLOW: Näherungsmethoden der höheren Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Übers. a. d. Russ.)
[4] LIEBMANN: Verfahren zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sitzungsberichte der Bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1918
Hier wurden von LIEBMANN die mathematischen Grundlagen der Näherungsmethode angegeben.
[5] A. O. MÜLLER: Über eine Methode zur Zeichnung der Feldbilder magnetischer Kraftlinien. Arch. f. Elektr. **17**, 1927, S. 501 bis 510
Einfacher, klarer Aufsatz. Enthält noch nicht die Aussage des Prinzips der Methode der Reste.
[6] H. BATEMAN: Partial Differential Equations of Mathematical Physics. S. 144, Dover Publ., New York 1944
[7] R. V. SOUTHWELL: On Relaxation Methods: A Mathematics for Engineering Science. Proc. Roy. Soc. **184**, 1945, S. 253
[8] R. V. SOUTHWELL: Relaxation Methods in Theoretical Physics. Oxford Univ. Press, 1946
[9] R. V. SOUTHWELL: Relaxation Methods in Engineering Science. Oxford Univ. Press, 1940
SOUTHWELL ist der Begründer der Methode der Reste; er veröffentlichte in Gemeinschaft mit verschiedenen Mitverfassern mehrere Arbeiten über die Anwendung

dieser Methode in mannigfachen Zweigen der Wissenschaft. Hiervon sind einige in der nachfolgenden Literaturangabe zu finden.

[10] H. MOTZ – W. D. WORTHY: Calculation of the Magnetic Field in Dynamo-Electric Machines by SOUTHWELL's Relaxation Method. Proc. I. E. E. 1945, II. S. 522

[11] G. H. SHORTLEI – R. WEBER: Numerical Solution of LAPLACE's Equation. J. Appl. Phys. **9**, 1938, S. 334

[12] O. I. BUTLER – M. R. SARMA: Relaxation Methods Applied to the Problem of A. C. Magnetisation of Ferromagnetic Laminae. Proc. I. E. E. **98**, 1951, II. S. 389 bis 398

P. ANWENDUNG DER METHODE DER RESTE IN ANDEREN ZWEIGEN DER WISSENSCHAFT

Sehr ausführliche Literatur bei WEBER: siehe E, [10]

Q. DIE METHODE VON LEHMANN UND RICHTER METHODE DER KRUMMLINIGEN QUADRATE (zu Abschn. (27.))

[1] NEUMAN – KALANTAROW: siehe E, [1], S. 388

[2] GOWORKOW: siehe E, [2], S. 218 ff.

[3] SIMONYI: Theoretische Elektrotechnik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957 (Übers. a. d. Ung.)

[4] HAGUE: siehe E, [14], S. 268

[5] BEWLEY: siehe E, [12], S. 167

[6] HESSLER – CAREY: Fundamentals of Electrical Engineering. Abschn. XVIII, S. 209 bis 218, McGraw-Hill, New York 1948
Einfache, klare Einführung.

[7] ATTWOOD: siehe E, [11], Abschn. 7. (Mapping electric Fields: S. 178 bis 185). Anwendungen verstreut. Befaßt sich auch mit der Zeichentechnik.

[8] A. D. MOORE: Fundamentals of Electrical Design. Abschn. V–IX, McGraw-Hill, New York 1927

[9] E. ROTH: siehe Artikel unter E, [7].
E, [8] ist die kurze, klare Zusammenfassung der graphischen Verfahren auf Grund des oben zitierten Aufsatzes von ROTH. Enthält die prinzipielle Grundlage des Verfahrens.

[10] LEHMANN: siehe E, [9] (Lumière Electr. Jahrgang 1909. Rev. gén. électr. Jahrgang 1923); die zitierten Artikel sind grundlegende Arbeiten über die graphische Methode. Ferner

[11] TH. LEHMANN: Graphische Methode zur Bestimmung des Kraftlinienverlaufs in der Luft. ETZ. 1909, S. 995

[12] R. RICHTER: Das magnetische Feld in den Lufträumen elektrischer Maschinen. Arch. f. Elektr. **11**, 1922, S. 85
Die Lehrbücher über elektrische Maschinen beruhen meist auf diesem Aufsatz. Beschreibt und erklärt die Methode. Zahlreiche, sehr schöne Abbildungen. Zeigt auch die Berücksichtigung des Nuteneffektes.

[13] R. RICHTER: E, [22], Bd. I. S. 167 und 190. Eigentlich der Inhalt der übrigen Artikel des Verfassers.

[14] BABIKOW, M. A.: Wichtige Bauteile elektrischer Apparate. Verlag Technik, Berlin 1954 (Übers. a. d. Russ.)

[15] H. PORITZKY: Graphical Field-Plotting Methods in Engineering. Trans. A. I. E. E. **57**, 1938, S. 727 bis 732

Eingangs findet man eine gute Einführung der Methode der „krummlinigen Quadrate“ auf Grund der LAPLACEschen Gleichung, nachher ihre Anwendung in verschiedenen Wissenschaftsgebieten.
[16] A. D. MOORE: Mapping Magnetic and Electrostatic Fields. Electr. J. **23,** 1926, July, S. 355 bis 362
[17] J. F. CALVERT: A Practical Application of Graphical Flux Mapping. Electr. J. **24,** 1927, Nov., S. 543 bis 547
[18] R. V. PICOU: Rev. gén. électr. **39,** 1936 Kraftlinienbild des permanenten Magneten.
[19] L. A. KILLGORE: Brief an den Redakteur (Diskussion zu L, [6] von WEBER), Electr. Engng. 1935, S. 253
[20] J. F. CALVERT: Brief an den Redakteur (Diskussion zu L, [6] von WEBER), Electr. Engng. 1935, S. 254
[21] E. WEBER: Brief an den Redakteur (Antwort auf die zwei vorigen Briefe), Electr. Engng. 1935, S. 347
Dieser Briefwechsel ist deshalb interessant, weil darin auf die praktische Bedeutung des Zeichnens und der Berechnung der Flußbilder, auf die Vor- und Nachteile der Berechnung und der Konstruktion hingewiesen wird.
[22] J. F. H. DOUGLAS: The Reluctance of Some Irregular Magnetic Fields. A. I. E. E. Proc. **34,** 1915, S. 1067 bis 1125
Hervorragende Übersicht und Literatur der graphischen und experimentellen Methoden.
[23] A. R. STEVENSON: Fundamental Theory of Flux Plotting. Gen. Electr. Rev. **29,** 1926, S. 794 bis 804
[24] R. E. DOHERTY – C. A. NICKLE: Synchronous Machines. Trans. A. I. E. E. **45,** 1926, S. 912 bis 942
Erster Teil einer Aufsatzreihe.
[25] C. M. LAFFOON – J. F. CALVERT: Additional Losses of Synchronous Machines. Trans. A. I. E. E. **46,** 1927, S. 84 bis 96
[26] A. R. STEVENSON – R. H. PARK: Graphical Determination of Magnetic Fields. Theoretical Considerations. Trans. A. I. E. E. **46,** 1927, S. 112 bis 135
Befaßt sich hauptsächlich mit FOURIER-Reihenberechnung mit Grenzbedingungen und mit der Anwendung des Vektorpotentials, gibt aber am Ende des Artikels eine Zusammenfassung der Konstruktionsregeln. Einer der besten Aufsätze, doch ein wenig unsystematisch.
[27] E. E. JOHNSON – C. H. GREEN: Graphical Determination of Magnetic Fields. Comparison of Calculations and Tests. Trans. A. I. E. E. **46,** 1927, S. 136 bis 140
Experimentelle Auswertung der vorigen Veröffentlichung.
[28] R. W. WIESEMANN: Graphical Determination of Magnetic Fields. Practical Applications to Salient-Pole Synchronous Machine Design. Trans. A. I. E. E. **64,** 1927, S. 141 bis 154
Die Diskussion der drei vorigen Artikel enthält äußerst interessante Bemerkungen hinsichtlich des Vergleichs und der praktischen Anwendbarkeit der graphischen, berechnenden und experimentellen Methoden.
[29] J. F. CALVERT – A. M. HARRISON: Graphical Flux Mapping. I, II, III, IV, V, VI. Electr. J. **25,** 1928, S. 147 bis 150, 179 bis 182, 246 bis 248, 362 bis 365, 399 bis 401, 510 bis 513
[30] B. L. ROBERTSON – I. A. TERRY: Analytical Determination of Magnetic Fields. Simple Cases of Conductors in Slots. Trans. A. I. E. E. **48,** 1929, S. 1242 bis 1259
[31] E. O. WILLOUGHBY: Some Applications of Field Plotting. Proc. I. E. E. **93,** 1946, II. S. 275
Die einleitenden Teile des Artikels behandeln die Methode der „krummlinigen Qua-

drate" und berühren die Näherungsmethode, ferner die Methode des elektrolytischen Troges und des Gummimodells.
[32] J. F. Calvert: Forces in Turbine Generator End Windings. Trans. A.I.E.E. **50,** 1931, S. 178 bis 194
[33] H. V. Putman: Surge Proof Transformers. Trans. A.I.E.E. **51,** 1932, S. 579 bis 584
[34] R. E. Doherty – O. E. Shirley: Reactances of Synchronous Machines and Its Applications. Trans. A.I.E.E. **37,** 1918, Teil 2, S. 1209
Enthält die praktische Anwendung von in Luft gezeichneten Magnetfeldern.
[35] B. Hague: The Air-Gap Magnetic Field in Non-Salient Pole Machinery. World Power **4,** 1925, 22
[36] R. W. Wiesemann: A Two-Speed Salient-Speed Synchronous Motor. Trans. A. I. E. E. **44,** 1924, S. 436

R. ANWENDUNG DER METHODE DER KRUMMLINIGEN QUADRATE IN ANDEREN ZWEIGEN DER WISSENSCHAFT

Siehe Poritzky Q, [15], und Weber E, [10]

S. DIE METHODE VON UNGER (28)

[1] F. Unger: Die Feldkurve bei synchronen Wechselstrommaschinen. ETZ **41,** 1920, S. 306 bis 310
Ausführliche Erörterung der Methode. Beschreibt nach theoretischen Erwägungen das Wesentliche dieser Methode und zeigt es dann an Beispielen. Enthält eine Kritik der Vernachlässigungen.
[2] F. Punga: Vorlesungen über Elektromaschinenbau. S. 11, Demmig, Darmstadt 1948

T. DIE KONSTRUKTION VON MAGNETFELDERN IN KUPFER (zu Abschn. (30.), (31.))

[1] Stevenson – Park: siehe Q, [26], Johnson-Green: siehe Q, [27], Wiesemann: siehe Q, [28]
[2] L. F. Richardson: The Free-Hand Graphic Method of Determining Stream Lines and Equipotentials. Vgl. mit [1]. Phil. Mag. **15,** 1908, S. 237
[3] Th. Lehmann: Aus den zitierten Aufsätzen: Rev. gén. électr. Jahrgang 1923
[4] J. F. H. Douglas: Magnetic Fields in Machinery Windings. Electr. Engng. **54,** 1935, S. 958 bis 966
Die Herstellung des Kraftlinienbildes in Kupfer durch Superposition von einfachen Komponenten gegenüber der umständlicheren Berechnungs- bzw. Konstruktionsmethode von Hague, Rogowski, Park und Stevenson.
[5] L. Dreyfus: siehe L, [18]
Zusammenfassung der Konstruktionsprinzipien im einleitenden Teil des Artikels.

U. BERECHNUNG UND KONSTRUKTION VON MAGNETFELDERN IN EISEN (zu Abschn. (32.))

(siehe auch DIE METHODE DER SPIEGELBILDER)

[1] Roths zitierte Aufsätze: E, [7]
[2] Searle: Electrician **11,** 1928, S. 435 und 510
Stellt das magnetische Feld von elektrischen Maschinen dar, das aus zwei Teilen

zusammengesetzt ist, und zwar aus dem vom Leiter erzeugten und aus dem von der Magnetisierung des Eisens herrührenden. Dasselbe ist auch bei HAGUE zu finden: E, [14]

[3] TH. LEHMANN: Aus den zitierten Aufsätzen: Spectres ferromagnetiques. Rev. gén. électr. **10,** 1926, S. 43 bis 50 und 85 bis 91

[4] TH. LEHMANN: Interpolar Fields of Saturated Magnetic Circuits. J. A. I. E. E. **46,** 1927, S. 1411 ff.

[5] HAGUE: siehe E, [14]

V. DIE METHODE DER SPIEGELBILDER (zu Abschn. (33.))

[1] J. BIERMANNS: Hochspannung und Hochleistung. 655 p. Hanser, München 1949 Sinngemäß auf magnetische Felder anwendbar.

[2] KÜPFMÜLLER: siehe H, [3], S. 193 bis 194

[3] WEBER: siehe E, [10]

[4] N. THOMSON: Papers on El. and Magnetism. S. 73 (Deutsche Ausgabe von L. Levy, Weinstein, Springer, 1890)

[5] HAGUE: siehe E, [14]

[6] S. L. GOKHALE: Magnetic Shielding. Trans. A. I. E. E. **48,** 1929, Okt., S. 1307 bis 1321. 5. Method of Magnetic Images.

W. EXPERIMENTELLE BESTIMMUNG VON MAGNETFELDERN IM ALLGEMEINEN (zu Abschn. (34.))

[1] E. ROTH: siehe E, [7] Die zitierte Aufsatzreihe.
E, [8] ATM V 8251 – 8252, Okt. 1937. Zusammenfassend auf Grund von ROTHS vorigem Artikel.
E. E. JOHNSON – C. H. GREEN: siehe Q, [27]

[2] J. F. H. DOUGLAS: siehe Q, [22]
Benützt das Widerstandsfeld von Blechmodellen mit großem Widerstand zur Bestimmung von magnetischen Feldern. Siehe Beispiel 23e.

[3] L. I. GUTENMACHER: Elektrische Modelle. Akademie Verlag, Moskau 1951
Eingehende, moderne Behandlung der Lösung partieller Differentialgleichungen mit elektrischen Netzmodellen und des Modells von Magnetfeldern.

[4] G. KRON: Electric Circuit Models of Partial Diff. Equations. Electr. Engng. 1948, S. 672
Enthält weitere Literatur über Netzmodelle.

[5] J. F. H. DOUGLAS – E. W. KANE: Potential Gradient and Flux Density. Their Measurement by an Improved Method in Irregular Electrostatic and Magnetic fields. Trans. A. I. E. E. **43,** 1924, S. 982

[6] W. CRAMP – N. I. CALDERWOOD: Calculation of Air-Space Flux. J. I. E. E. **61,** 1923, 1061 bis 1171

[7] A. STILL: Flux distribution in Air-Gap and Teeth of Dynamos. Electrician **88,** 1922, S. 152 bis 153, 187 bis 188

[8] B. ELL: New Method to Illustrate Direction and Density in an Electric Field by Means of Sensitized Paper or Plates. Tekn. Tidskr. (Elektr.) **51,** 1921, S. 49 bis 55; ETZ **42,** 1921, S. 1194 bis 1196. Auszug

[9] F. S. DELLENBAUGH: A Direct Recording Method of Measuring Magnetic Flux Distribution. J. A. I. E. E. **39,** 1920, S. 583 bis 587

[10] POHL, R.: Magnetic Leakage of Salient Poles. J.I.E.E. **52,** 1914, S.170 bis 176
[11] TH. LEHMANN: Siehe Aufsätze E, [9]
[12] P.H. POWELL: Air-Gap Correction Coefficient. J. I.E.E. **40,** 1907, S.228 bis 234
[13] TH. F. WALL: Reluctance of the Air-Gap in Dynamo-Machines. J. I.E.E. **40,** 1907, S.550 bis 576
[14] W.M. THORTON: Distribution of Magnetic Induction and Hysteresis Losses in Armatures. J. I.E.E. **37,** 1906, S.125 bis 139
[15] HELE – SHAW und andere: Hydrodynamical and Electrodynamic Investigations Regarding the Magnetic Flux Distributions in Toothed-Core Armatures. J. I.E.E. **34,** 1904, S.21 bis 53
[16] H.S. HELE-SHAW – A. HAY – P.H. POWELL: Phil. Trans. Serie A. **195,** 1900, S.303
Herstellung magnetischer Kraftlinienbilder durch Flüssigkeitsströmung.
[17] M. GOODSEY: Two Methods of Mapping Flux Lines. Electr. Engng. 1935, S.1032 bis 1036
Herstellung magnetischer Felder mit elektrischem Strom in Widerstandsmodellen.
[18] Kraftlinienbilder aus Eisenfeilspänen: POHL: Einführung in die Elektrizitätslehre. 8. bis 9. Aufl. Springer, Berlin 1943. Abschn. I, III, IV; Trans. A.I.E.E. 1927; S.148 bis 150
R. ROTH: Elektrotechnik und Maschinenbau **55,** 1937, 338
TH. LEHMANN: Fantomes Magnetiques à la limaille comme moyen d'investigation quantitatif. Rev. gén. électr. **11,** 1936, S.747 (zusammenfassender Artikel)

X. AUSMESSEN MAGNETISCHER FELDER

Hier werden nur einige Literaturhinweise angegeben, die weiteres eingehendes Schrifttum enthalten.

[1] H. NEUMANN: Magnetische Spannung und magnetische Feldstärke; Definitionen, Größen, Einheiten, Gleichungen, Beispiele für Berechnung. Grundlagen der Messung. ATM V 390–1
[2] H. BOUCKE: Messung magnetischer Gleichfelder mit Hochfrequenz-Eisenkernspule. ATM V 391–1
[3] G. BUBLITZ: Messung magnetischer Gleichfelder mit Wismutspiralen und Wismutplatten. ATM V 391–2
[4] F.W. GRUNDLACH: Messung magnetischer Gleichfelder mit Magnetfeldröhren. ATM V 391–3
[5] H. NEUMANN: Messung magnetischer Gleichfelder. Eigenschaften der Felder und Feldräume. ATM V 391–4
Hier besonders reichhaltiges Literaturverzeichnis. Viele Aufsätze über große (experimentelle) Elektromagnete.
[6] H. NEUMANN: Messung magnetischer Gleichfelder nach dem induktiven Verfahren. ATM V 391–5
Literaturverzeichnis im vorigen Artikel.
[7] A. ENGEL: Fortschritte auf dem Gebiet magnetischer Meßverfahren für Gleichfelder. ATM V 391–6
Literaturangaben bis 1950

Y. AUSMESSUNG ANDERER FELDER

Es wird wiederum auf die Literaturangaben (Fußnoten!) bei WEBER: E, [10], und auf das ATM hingewiesen.

Z. PERMANENTE MAGNETE

Hier werden nur einige grundlegende und einleitende Werke erwähnt:

[1] J. FISCHER: Über Dauermagnete: Eigenschaften, Bemessung, Baustoffe. Arch. f. Elektr. **39,** 1949, 327 bis 340
Behandelt die Zustandskurven remanenter und permanenter Magnete, die wirtschaftlichste Dimensionierung und die BECKERsche Spannungstheorie. Enthält weitere Literaturangaben.

[2] J. FISCHER: Abriß der Dauermagnetkunde. S. 240, Springer, Berlin 1949
Besprochen u. a. in Bull. SEV 1950, S. 695

[3] S. EVERSHED: Electrician **84,** 1920, S. 591. J. I. E. E. **58,** 1910, S. 780; **63,** 1925, S. 725

[4] E. A. WATSON: J. I. E. E. **61,** 1923, S. 641

[5] A. HUG: Permanente Magnete, die Dimensionierung ihres Kreises. Bull. SEV **41,** 1950, S. 661 bis 669
Halbempirische Methode für die Berechnung permanenter Magnete. In einfacher, leicht verständlicher Weise für die Praxis geschrieben; behandelt sodann ihre Messung und Magnetisierung.

[6] A. TH. URK: Der Gebrauch moderner Stahlsorten für permanente Magnete. Philips' Techn. Rdsch. 1940, S. 29 bis 35

[7] ATM Z 60–1. Zusammenfassender Artikel.
ATM Z 912–1. Daten von Materialien für permanente Magnete. Weitere ausführliche Literatur.

ZEITSCHRIFTENKURZTITEL

Ann. Phys.	Annalen der Physik
Ann. d. Ch. et d. Phys.	Annales de Chimie et de Physique
Arch. f. Elektr.	Archiv für Elektrotechnik
ATM	Archiv für technisches Messen
Bell Syst. Techn. J.	Bell System Technical Journal
Bull. SEV	Bulletin des Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins
Bull. Soc. Franc. Él.	Bulletin de la Société Française des Électriciens
Electr. J.	Electric Journal
Electr. Engng.	Electrical Engineering (bis 1919: Proceedings of the American Institute of Electrical Engineers; 1920 bis 1930: Journal of the A/merican I/nstitute of E/lectrical E/ngineers)
El. Wld.	Electrical World
Electrician	The Electrician
El. Rev.	The Electrical Review
E. u. M.	Elektrotechnik und Maschinenbau
ETZ	Elektrotechnische Zeitschrift
Engng.	Engineering
Gen. Electr. Rev.	General Electric Review
J. Appl. Phys.	Journal of Applied Physics
J. A. I. E. E.	Journal of the A/merican I/nstitute of E/lectrical E/ngineers. – Siehe Electr. Engng.
J. I. E. E.	The Journal of the Institution of Electrical Engineers
J. Math. Phys. (M. I. T.)	Journal of Mathematics and Physics (MIT)
J. Sci. Inst.	Journal of Scientific Instruments
Lumière électr.	La Lumière Électrique
Phil. Mag.	The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science
Phil. Trans.	Philosophical Transactions of the Royal Society of London
Philips' Techn. Rdsch.	Philips' Technische Rundschau
Phys. Z.	Physikalische Zeitschrift
Phys. Rev.	The Physical Review
Proc. I. R. E.	Proceedings of the Institute of Radio Engineers
Proc. I. E. E.	Proceedings of the Institution of Electrical Engineers (Parts I, II, II A, III, III A). (Bis 1948: siehe The Journal of the Institution of Electrical Engineer)
Proc. Roy. Soc.	Proceedings of the Royal Society of London
Rev. Mod. Phys.	Review of Modern Physics
Rev. gén. électr.	Revue Générale de l'Électricité
Trans. A. I. E. E.	Transactions of the American Institute of Electrical Engineers
Trans. Camb. Phil. Soc.	Transactions of the Cambridge Philosophical Society
Z. VDI	Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure

HAUPTSÄCHLICH VERWENDETE FORMELZEICHEN

A Arbeit
$\mathfrak{A}$ Vektorpotential
a Abstand
B magnetische Induktion
b Beschleunigung, Breite
C Kapazität
c Lichtgeschwindigkeit
D dielektrische Verschiebungsdichte
d Durchmesser, Dicke
E elektrische Feldstärke
e Elementarladung
F Fläche
f Frequenz
G Stromdichte
H magnetische Feldstärke
h Höhe
I Stromstärke; Gleichstromstärke oder Effektivwert
i Momentanwert des Stromes
L Selbstinduktionskoeffizient
l Länge
M Gegeninduktivität
$\mathfrak{M}$ Magnetisierungsvektor
m magnetische Menge (Polstärke)
N Leistung
n Drehzahl
P Kraft
p Zahl der Polpaare
Q elektrische Ladung
R Widerstand, Radius; R_m = magnetischer Widerstand
r Radius, Entfernung
s Länge, Strecke
t Zeit
U elektrische Spannung; Gleichspannung oder Effektivwert; U_m = magnetische Spannung
u Momentanwert der elektrischen Spannung
V elektrisches Potential, magnetisches Potential
v Geschwindigkeit, Volumen
W Energie
w Windungszahl
δ Luftspaltbreite
ε Dielektrizitätskonstante; ε_0 = Dielektrizitätskonstante des Vakuums; ε_r = relative Dielektrizitätskonstante
ϑ Winkel
Θ Durchflutung
λ magnetische Leitfähigkeit
μ Permeabilität; μ_0 = Permeabilität des Vakuums; μ_r = relative Permeabilität
ν Ordnungszahl der Oberharmonischen
ϱ spezifischer elektrischer Widerstand, elektrische Ladungsdichte
σ Streufaktor; elektrische Leitfähigkeit
Φ magnetischer Fluß, Induktionsfluß, Φ_s = Spulenfluß bzw. Kraftlinienverkettung
φ Skalar (allgemein)
ψ dielektrischer Fluß

SONSTIGE ZEICHEN

$\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ Rechtsdreibein
j imaginäre Einheit
$\mathfrak{n}$ normaler Einheitsvektor
$\mathfrak{r}^0$ Einheitsvektor in Richtung r
$\mathfrak{t}$ tangentialer Einheitsvektor
$\mathfrak{v}$ allgemeiner Vektor